

محمد غزالي

عبد السلام حَقَّاف



الرياضيات

الجبر والهندسة والاحتمالات

تمارين وحلول

السنة الثالثة الثانوية
علوم رياضية أ و ب

● ملاحظات للمدرس

● مسائل للبحث والتفوية



سلسلة دروس

الفهرس

7	I الحسا بيات
137	II الاعداد العديكة
226	III المخروطيات
268	IV الاحتمالات
317	V البنيات الجبريكة
318	* قوانين التركيب الداخليه
345	* الزمكة
379	* الحلقه
379	* الجسم
422	* الفضاء المتجهي
444	* النظمكات الخطية

الحسابيات

I - القسمة الإقليدية في \mathbb{Z} :

$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid a = bq + r \text{ و } 0 \leq r < b$
 * عندما نحدد الزوج (q, r) نقول أننا أجرينا القسمة الإقليدية لـ a على b .
 * a يسمى المقسوم و b المقسوم عليه و q الخارج و r الباقي.

قابلية القسمة في \mathbb{Z} : ليكن a و b في \mathbb{Z} .

$$a/b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid b = ka \quad (a \text{ يقسم } b)$$

الموافقة بتزديد : $a \equiv b [n] \Leftrightarrow a - b = kn \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow n \mid a - b$

$$a \equiv b [n] \Leftrightarrow a + c \equiv b + c [n] \text{ و } a \equiv b [n] \Leftrightarrow ac \equiv bc [n]$$

$$\begin{cases} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{cases} \Rightarrow a + c \equiv b + d [n] \text{ و } \begin{cases} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd [n]$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a/b \text{ و } b/a \Rightarrow |a| = |b|$$

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : a/a \text{ و } d/b \Rightarrow \forall (a, p) \in \mathbb{Z}^2 : d \mid (a + pb)$$

$$\forall a \in \mathbb{Z} : a/a$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \forall n \in \mathbb{N} : a^n/b \Rightarrow a/b$$

II - القاسم المشترك الأكبر :

ليكن a و b و d في \mathbb{Z} .

* d قاسم مشترك لـ a و b يعني أن : d/a و d/b .

* أكبر قاسم مشترك موجب للعدين a و b يسمى القاسم المشترك الأكبر.

لـ a و b ويرمز له بـ : $a \wedge b$ (أو $\Delta(a, b)$ أو $\text{pgcd}(a, b)$)

خاصيات :

$$d = a \wedge b \Rightarrow d/a \text{ و } d/b$$

$$\begin{cases} d' \mid a \\ d' \mid b \end{cases} \Rightarrow d' \mid a \wedge b$$

* a و b أوليان فيما بينهما $\Leftrightarrow a \wedge b = 1$

$$d = a \wedge b \Leftrightarrow \exists (a', b') \in \mathbb{Z}^2 : a \wedge b' = 1 \text{ و } a = da' \text{ و } b = db'$$

$$d = a \wedge b \Rightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : d = ua + vb$$

مبرهنة (Bézout) :

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : ua + vb = 1$$

III - المضاعف المشترك الأكبر :

ليكن a و b و m من \mathbb{Z} .

* m مضاعف مشترك لـ a و $b \iff a|m \text{ و } b|m$.

* آخر مضاعف مشترك موجب للعديدين a و b يسمى المضاعف المشترك الأكبر

لـ a و b ويرمز له بـ : avb (أو $\text{ppcm}(a;b)$)

خاصيات :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3, \begin{cases} a|c \\ b|c \end{cases} \Rightarrow (avb) | c$$

$$m = avb \Rightarrow a|m \text{ و } b|m$$

$$\begin{cases} a|c \\ b|c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab|c$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 : (avb)(a \wedge b) = |ab|$$

IV - الأعداد الأولية :

* ليكن a و a في \mathbb{Z} . نقول بأن a قاسم فعلي لـ a إذا كان a يقسم a و

يخالف لكل من الأعداد : a ; $-a$; 1 ; -1 .

* نقول أن a أولي إذا كان مخالف لـ 1 و -1 وليس له قواسم فعلية.

ملاحظة : الأعداد : 0 ; -1 ; 1 ليست أولية.
مجموعة الأعداد الأولية لا متناهية.

خاصيات : ليكن p عدد أولي.

$$p|ab \Rightarrow p|a \text{ أو } p|b$$

$$p|a^n \Rightarrow p|a$$

$$p|a_1 a_2 \dots a_n \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} : p|a_i$$

إذا كان : $p|a$ فإن : $p \wedge a = p$; إذا كان $p \nmid a$ فإن : $p \wedge a = 1$

$$\forall (a,b,d) \in \mathbb{Z}^3 : \begin{cases} d|ab \\ d \wedge a = 1 \end{cases} \Rightarrow d|b$$

مبرهنة (Gauss) :

خاصيات : ليكن a و b و c في \mathbb{Z} .

$$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \iff a \wedge bc = 1$$

$$a \wedge b = 1 \iff \forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : a^n \wedge b^m = 1$$

$$a \wedge b = b \wedge r \iff (a = bq + r \text{ و } 0 \leq r < b)$$

خوارزمية إقليدس :

ليكن a و b في \mathbb{N} بحيث : $a > b$.

نجز القسمة لـ a على b : $a = bq_0 + r_0$: $0 \leq r_0 < b$

* إذا كان: $r_0 = 0$ فإن: $b | a$ ، وبالتالي: $a \wedge b = b$

* إذا كان: $0 < r_0 < b$ ، نجرى القسمة الإقليدية لـ b على r_0 .

$$b = r_0 q_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < r_0 < b$$

* إذا كان: $r_1 = 0$ فإن: $r_0 | b$ ، وبالتالي: $a \wedge b = b \wedge r_0 = r_0$

* إذا كان: $r_1 \neq 0$ نجرى القسمة لـ r_0 على r_1 .

$$r_0 = r_1 q_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

بعد إعادة نفس الطريقة عدة مرات سوف نحصل على باقي منعدم ، والقاسم المشترك لـ a و b يكون آخر باقي غير منعدم .

V - تفكيك عدد صحيح نسبي غير منعدم إلى جداء عوامل أولية :

كل عدد صحيح نسبي غير منعدم مخالف لـ 1 و -1 يمكن أن يكتب بكيفية وحيدة على

$$n = \epsilon p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r} \quad \text{الشكل :}$$

حيث : p_1, p_2, \dots, p_r أعداد أولية موجبة ومختلفة متماثلين .

a_1, a_2, \dots, a_r أعداد صحيحة طبيعية غير مندمجة .

$\epsilon = 1$ إذا كان $n > 0$ ، $\epsilon = -1$ إذا كان $n < 0$.

للمجموعة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \{1\})$:

ليكن a و b في \mathbb{Z} : $a \equiv b \pmod{n} \iff a - b = kn \quad (k \in \mathbb{Z})$

* العلاقة " \equiv " علاقة تكافؤ .

* صنف تكافؤ $x \pmod{n}$: $\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv x \pmod{n}\}$

* مجموعة أصفاف التكافؤ بالنسبة للعلاقة " \equiv " ، وتكتب : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \dots; \overline{(n-1)}\}$$

* الجمع في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$

* الضرب في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\overline{xy} = \bar{x} \bar{y}$

* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +)$ زوجة تبادلية *

* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +, \cdot)$ حلقة تبادلية واحدة *

* n أولي $\iff (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +, \cdot)$ جسم *

* \bar{a} قابل للعقب في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\iff a \wedge n = 1$

VII - نظم العد :

ليكن x من \mathbb{N} بحيث : $x \geq 2$.

كل عدد b من \mathbb{N} يمكن أن يكتب على شكل :

$$b = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket : a_i \in \llbracket 0, x-1 \rrbracket$ و $a_n \neq 0$.

$$b = \overbrace{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{(x)} : \text{وكتب}$$

ونقول أن $\overbrace{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{(x)}$ هو التمثيل المختصر

للعدد b في نظام العد ذات الأساس x .

تحديد : $a \vee b$ و $a \wedge b$:

(أعداد أولية
مختلفة متناهية)
 $p_i, i \in \mathbb{N}$
 $n \leq i \leq n$

$$b = \prod_{i=1}^n p_i$$

$$a = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i} : \text{إذ أن}$$

$$a \vee b = \prod_{i=1}^n p_i^{\sup(a_i, b_i)}$$

$$a \wedge b = \prod_{i=1}^n p_i^{\inf(a_i, b_i)} : \text{فإن}$$



بأقوى خمس دقائق ويصفنا الحكم

الحسابيات

1 ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث : $a \geq b$
 ويكون r باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b .
 بين أن : $a \geq 2r$.

الجواب : نعلم أنه : $0 \leq r < b$ و $a = bq + r$ | $\exists! q \in \mathbb{N}$
 لدينا : $a \geq b$ ، منه : $q \geq 1$ ، إذن : $bq \geq b$
 ، منه : $bq + r \geq b + r$ وبما أن : $r < b$ فإن : $b + r > 2r$
 وبالتالي : $a \geq 2r$.

2 ليكن a و b و c أعداد في \mathbb{Z} بحيث :

q_1 هو خارج القسمة الإقليدية لـ a على bc .
 q_2 هو خارج القسمة الإقليدية لـ a على b .
 q_3 هو خارج القسمة الإقليدية لـ a على c .
 بين أن : $q_2 = q_3$.

الجواب : لدينا حسب المعطيات : توجد q_1 و r_1 و q_2 و r_2 و q_3 و r_3 من \mathbb{N} بحيث :

$$(1) \quad a = bcq_1 + r_1 \quad | \quad 0 \leq r_1 < bc$$

$$(2) \quad a = bq_2 + r_2 \quad | \quad 0 \leq r_2 < b$$

$$(3) \quad a = cq_3 + r_3 \quad | \quad 0 \leq r_3 < c$$

من (1) و (3) نستنتج أن :

لكي نبين أن $q_2 = q_3$ يكفي أن نبين أن : $0 \leq br_3 + r_2 < bc$

(بحسب وحدانية القسمة الإقليدية)

$$\text{لدينا ،} \quad 0 \leq r_3 < c \Rightarrow 0 \leq r_3 \leq c-1$$

$$\text{بإذن :} \quad 0 \leq br_3 \leq bc - b$$

$$\text{وبما أن :} \quad 0 \leq r_2 < b \quad \text{فإن :} \quad 0 \leq br_3 + r_2 < bc \quad \text{، منه :} \quad q_2 = q_3$$

ليكن n من \mathbb{Z} و a و b من \mathbb{N} .

3

q خارج القسمة الاقليدية لـ n على a .

q' خارج القسمة الاقليدية لـ q على b .

بين ان q' هو خارج القسمة الاقليدية لـ n على ab .

الجواب : ليكن r باقي القسمة الاقليدية لـ n على a و r' باقي القسمة الاقليدية لـ q على b لدينا :

$$\begin{cases} q = bq' + r' \\ 0 \leq r' \leq b-1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} n = aq + r \\ 0 \leq r \leq a-1 \end{cases}$$

منه نستنتج ان : $n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$

وبما ان : $0 \leq r' \leq b-1$ و $0 \leq r \leq a-1$ فان : $ar' + r \leq ab-1$

ومنه : $0 \leq ar' + r \leq ab-1$ و $n = abq' + ar' + r$

أي q' هو خارج القسمة الاقليدية لـ n على ab .

ملاحظة هامة : ليكن q خارج القسمة الاقليدية لـ a على b و r هو باقي هذه القسمة لدينا : $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$

$$\text{اذن : } \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \quad ; \quad \text{منه : } E\left(\frac{a}{b}\right) = q + E\left(\frac{r}{b}\right)$$

وبما ان : $0 \leq \frac{r}{b} < 1$ فان : $q = E\left(\frac{a}{b}\right)$

باستعمال التقريب السابق يكون قد برهننا على : $E\left(\frac{n}{ab}\right) = E\left(\frac{E\left(\frac{n}{a}\right)}{b}\right)$

ليكن a و b من \mathbb{N} بحيث : $a \geq 3$ و $b \geq 2$.

4

ليكن q خارج القسمة الاقليدية لـ $a-1$ على b .

حدد خارج القسمة الاقليدية لـ $ab^{1999} - 1$ على b^{2000} .

الجواب : ليكن r باقي القسمة الاقليدية لـ $a-1$ على b

لدينا : $a-1 = bq + r$ و $0 \leq r \leq b-1$

ومنه : $ab^{1999} - b^{1999} = bq + r$

$\begin{cases} ab^{1999} - b^{1999} = bq + r \\ 2b^{1999} \leq b^{2000} - b^{1999} \end{cases}$

أي : $\begin{cases} ab^{1999} = bq + (2b^{1999} + b^{1999}) \\ 2b^{1999} + b^{1999} \leq b^{2000} \end{cases}$

$$\begin{cases} ab^{1999} - 1 = b^{2000} + (ab^{1999} + b^{1999} - 1) \\ ab^{1999} + b^{1999} - 1 < b^{2000} \end{cases} \quad \text{أي:}$$

ومن خارج القسمة الإقليدية $\rightarrow ab^{1999} - 1$ على b^{2000} هو q .

حدد باقي القسمة الإقليدية لـ 1000 على 13 .

5

الجواب: ملاحظة: إذا كان n هو باقي القسمة الإقليدية لـ a على n

$$(n \in \mathbb{N}^*) \quad a \equiv n \pmod{n} \quad \text{فإن:}$$

$$\text{لدينا: } [13] \quad 100 \equiv 9 \quad \text{لأن: } [13] \quad 100 \equiv 3$$

$$[13] \quad 100^3 \equiv 9 \times 3 \quad \text{لأن: } [13] \quad 100^3 \equiv 1$$

$$\text{ومنه: } [13] \quad 100^{999+1} \equiv 100$$

$$[13] \quad 100^{1000} \equiv (100^3)^{333} \times 100$$

$$[13] \quad 100^{1000} \equiv 9$$

وبالتالي باقي القسمة الإقليدية لـ 1000 على 13 هو 9 .

www.learnit.66ghz.com

حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد 52×41 على 19×23 .

6

الجواب: لدينا: $[7] \quad 19 \equiv 5$ لأن: $[7] \quad 19 \equiv (25)^2$

$$\text{ومنه: } [7] \quad 19^4 \equiv 2 \quad \text{لأن: } [7] \quad 19 \equiv 2$$

$$\text{ولدينا: } [7] \quad 23 \equiv 2 \quad \text{لأن: } [7] \quad 23 \equiv 2$$

$$\text{لأن: } [7] \quad 19 \times 23 \equiv 2 \times 2$$

$$[7] \quad 19^{52} \times 23^{41} \equiv 2^{54}$$

$$[7] \quad 19^{52} \times 23^{41} \equiv (2^3)^{18}$$

$$[7] \quad 19 \times 23 \equiv 8$$

$$[7] \quad 19^{52} \times 23^{41} \equiv 1 \quad (\text{لأن: } [7] \quad 8 \equiv 1)$$

وبالتالي باقي القسمة الإقليدية لـ 52×41 على 19×23 هو 1 .

7

حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي من أجلهاالعدد 11 يقسم العدد $2 \cdot 3^n + 1$.الجواب : ليكن n عنصرًا من \mathbb{N} ، نضع :

$$u_0 = 2 \cdot 1 + 1 \equiv 3 \quad [11] \quad \text{إذا كان : } n=0 \quad \text{فإن :}$$

$$u_1 = 2 \cdot 3 + 1 \equiv 7 \quad [11] \quad \text{إذا كان : } n=1 \quad \text{فإن :}$$

$$u_2 = 2 \cdot 3^2 + 1 \equiv 8 \quad [11] \quad \text{إذا كان : } n=2 \quad \text{فإن :}$$

$$u_3 = 2 \cdot 3^3 + 1 \equiv 0 \quad [11] \quad \text{إذا كان : } n=3 \quad \text{فإن :}$$

$$u_4 = 2 \cdot 3^4 + 1 \equiv 9 \quad [11] \quad \text{إذا كان : } n=4 \quad \text{فإن :}$$

$$u_5 = 2 \cdot 3^5 + 1 \equiv 3 \quad [11] \quad \text{إذا كان : } n=5 \quad \text{فإن :}$$

هذه الطريقة تنطبق على جميع دورية دورها $T=5$ ، عند كل k من \mathbb{N} لدينا :

$$2 \cdot 3^{5k} + 1 \equiv 3 \quad [11]$$

$$2 \cdot 3^{5k+1} + 1 \equiv 7 \quad [11]$$

$$\text{www.learnit.66ghz.com}$$

$$2 \cdot 3^{5k+2} + 1 \equiv 8 \quad [11]$$

$$2 \cdot 3^{5k+3} + 1 \equiv 0 \quad [11]$$

$$2 \cdot 3^{5k+4} + 1 \equiv 9 \quad [11]$$

وبالتالي $2 \cdot 3^n + 1$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان : $n = 5k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$)

8

ليكن n من \mathbb{N} .

$$\frac{4n+1}{2} + \frac{2n+1}{3}$$

(أ) بين أن 5 يقسم العدد

$$\frac{n+3}{3} - \frac{4n+2}{4}$$

(ب) بين أن 11 يقسم العدد

$$u_n = 2^{\frac{2n+1}{2}} + 3^{\frac{2n+1}{3}} \quad \text{نضع : (أ) الجواب :}$$

$$u_n = 4^n \times 2 + 9^n \times 3$$

لدينا :

$$9^n \equiv 4^n \quad [5]$$

فإن :

$$9 \equiv 4 \quad [5]$$

بما أن :

$$u_n \equiv 4^n \times 2 + 4^n \times 3 \quad [5] \quad \text{وهذا،}$$

$$u_n \equiv 5 \times 4^n \quad [5] \quad \text{أي،}$$

$$(5 \times 4^n) \text{ يقسم } 5 \text{ لأن } 5 \text{ يقسم } 5 \quad [5] \quad \text{وهذا،}$$

$$2^{2n+2} + 3^{2n+2} \quad \text{والتالي، } 5 \text{ يقسم العدد}$$

$$v_n = 3^{n+3} - 4^{n+2} \quad (4) \text{ نضع:}$$

$$v_n = 27 \times 3^n - (256) \times 4^n \quad \text{لدينا:}$$

$$256 \equiv 3 \quad [11] \quad ; \quad 4^2 \equiv 5 \quad [11] \quad ; \quad 27 \equiv 5 \quad [11] \quad \text{بما أن:}$$

$$v_n \equiv 5 \times 3^n - 3 \times 5 \quad [11] \quad \text{فإن:}$$

$$v_n \equiv 0 \quad [11] \quad \text{أي،}$$

$$3^{n+3} - 4^{n+2} \quad \text{والتالي: } 11 \text{ يقسم العدد}$$

$$u_n = 4^n - 1 - 3n \quad \text{لك } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ نضع} \quad \mathbf{9}$$

$$u_{n+1} = 4u_n + 9n \quad (1) \text{ حيث أن كل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$9 \mid 4^n - 1 - 3n \quad (2) \text{ استنتج أن كل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

الجواب: (1) ليكن n من \mathbb{N} لدينا:

$$u_{n+1} = 4^{n+1} - 1 - 3(n+1)$$

$$u_{n+1} = 4 \cdot 4^n - 1 - 3n - 3$$

$$4^n = u_n + 1 + 3n \quad \text{بما أن:} \quad u_n = 4^n - 1 - 3n \quad \text{فإن:}$$

$$u_{n+1} = 4u_n + 9n \quad \text{وهذا:}$$

$$u_n = 4^n - 1 - 3n \quad (3) \text{ ليبدأ أن كل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ يقسم}$$

البهرهان بالتراجع، من أجل $n=0$ لدينا: $u_0 = 0$ ، وهذا 9 يقسمه

نفترض أن 9 يقسم u_n ، وببينة أن 9 يقسم u_{n+1} .

$$4u_n \equiv 0 \quad [9] \quad \text{وهذا،} \quad u_n \equiv 0 \quad [9] \quad \text{لدينا:}$$

$$4u_n + 9 \equiv 0 \quad [9] \quad \text{فإن:} \quad 9 \equiv 0 \quad [9]$$

$$u_{n+1} \equiv 0 \quad [9] \quad \text{وهذا،} \quad \text{أي } 9 \text{ يقسم } u_{n+1}$$

$$9 \mid 4^n - 1 - 3n$$

وبالتالي لكل n عدد $9 \mid$

ليكن n عدد $9 \mid$ نضع :

10

$$\mu_n = 3(81)^{n+2} + (16n-54) \cdot 9^{n+2} - 320n^2 - 144n + 243$$

$$27(9^n - 1) + 40n \quad (1) \text{ بين أن } 8 \text{ تقسم العدد}$$

$$9(9^n - 1) - 8n \quad (2) \text{ بين أن } 8 \text{ تقسم العدد}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{8} [27(9^n - 1) + 40n] \quad (3) \text{ نضع :}$$

$$\beta_n = \frac{1}{8} [9(9^n - 1) - 8n]$$

$$\mu_n = 64 \alpha_n \cdot \beta_n \quad \text{أ. عدد أن لكل } n \text{ عدد } 9 \mid$$

$$2 \mid \mu_n \quad \text{ب. استنتج أن :}$$

الجواب : (2) ليكن n عدد $9 \mid$ لدينا : $9^n \equiv 1 \pmod{8}$ (1) $9 \equiv 1 \pmod{8}$

$$27(9^n - 1) \equiv 0 \pmod{8} \quad (2)$$

$$27(9^n - 1) + 40n \equiv 0 \pmod{8} \quad (3) \text{ لأن } 40n \equiv 0 \pmod{8}$$

$$8 \mid 27(9^n - 1) + 40n \quad \text{وبالتالي :}$$

$$8 \mid 9(9^n - 1) - 8n \quad (2) \text{ بالمثل سب أن :}$$

(3) 1- ليكن n عدد $9 \mid$ لدينا :

$$\mu_n = 3 \cdot 9^{2n+2} + (16n-54) \cdot 9^{n+2} - 320n^2 - 144n + 243$$

$$\mu_n = 3 \cdot (9^{n+2})^2 + (16n-54) \cdot 9^{n+2} + (40n-27)(-8n-9)$$

$$\mu_n = (3 \cdot 9^{n+2} + 40n - 27)(9^{n+2} - 8n - 9)$$

$$\mu_n = (27(9^n - 1) + 40n)(9(9^n - 1) - 8n)$$

$$\mu_n = 8 \alpha_n \times 8 \beta_n$$

$$\mu_n = 64 \alpha_n \cdot \beta_n \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{8} (27(9^n - 1) + 40n) \quad \text{ب. ليكن } n \text{ عدد } 9 \mid \text{ لدينا :}$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} 9^k = \frac{9^n - 1}{9 - 1} = \frac{1}{8} (9^n - 1) \quad \text{وبما أن :}$$

$$d_n = 27 \left(\frac{9^n - 1}{8} \right) + 5n = 27 \sum_{k=0}^{n-1} 9^k + 5n \quad \text{جواب}$$

$$d_n = 27 \sum_{k=0}^{n-1} 1 + 5n \quad [8] \quad \text{و ما ان} \quad 9 \equiv 1 \quad [8]$$

$$d_n \equiv 27n + 5n \quad [8] \quad \text{و ا}$$

$$d_n \equiv 0 \quad [8] \quad \text{و ما}$$

و ما 8 تقسم d_n .

$$p_n = \frac{1}{8} (9 (9^n - 1) - 8n) \quad \text{و ما ان}$$

$$p_n = 9 \sum_{k=0}^{n-1} 9^k - n \equiv 9 \sum_{k=0}^{n-1} 1 - n \quad [8] \quad \text{و ا}$$

$$p_n \equiv 9n - n \quad [8]$$

$$p_n \equiv 0 \quad [8] \quad \text{و ا}$$

و ما 8 تقسم p_n

$$\begin{cases} 8 \mid d_n \\ 8 \mid p_n \end{cases} \Rightarrow 64 \mid n \cdot p_n$$

$$\Rightarrow (64)^2 \mid 64 d_n p_n$$

$$64 \mid d_n$$

$$2^{12} \mid d_n$$

$$64 = 2^6 \quad \text{فان}$$

و ما ان

$$A_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n)!}{k}$$

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نضع

11

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \frac{(2n)!}{k(2n+1-k)} \in \mathbb{N} \quad (2) \quad \text{و ما ان}$$

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(2n)!}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{(2n)!}{2n+1-k} \quad (2) \quad \text{و ما ان}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2n+1 \mid A_n \quad (3) \quad \text{استنتج ان}$$

$$2k \neq 2n+1 \quad \{1, \dots, n\} \quad (2) \quad \text{لدينا لكل } k \text{ من}$$

$$k \neq 2n+1-k \quad \text{و ما}$$

$$k < 2n \quad \Rightarrow \quad 2n+1-k < 2n \quad \text{و ما}$$

$$\frac{(2n)!}{k(2n+2-k)} \in \mathbb{N} \quad \text{ومنه :}$$

(2) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا :

$$A_n = \sum_{k=2}^{2n} \frac{(2n)!}{k} = \sum_{k=2}^n \frac{(2n)!}{k} + \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{(2n)!}{k}$$

($k=2n+2-i$ في \sum)

$$A_n = \sum_{k=2}^n \frac{(2n)!}{k} + \sum_{i=2}^{2n+2-n} \frac{(2n)!}{2n+2-i}$$

$$A_n = \sum_{k=2}^n \frac{(2n)!}{k} + \sum_{k=2}^n \frac{(2n)!}{2n+2-k}$$

(3) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا :

$$A_n = \sum_{k=2}^n \frac{(2n)!}{k} + \sum_{k=2}^n \frac{(2n)!}{2n+2-k}$$

$$A_n = \sum_{k=2}^n \frac{(2n)! \cdot (2n+2)}{k(2n+2-k)} \quad \text{ومنه :}$$

$$A_n = (2n+2) \sum_{k=2}^n \frac{(2n)!}{k(2n+2-k)} \quad \text{أي :}$$

$$\frac{(2n)!}{k(2n+2-k)} \in \mathbb{N} \quad \text{, } \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{(2n)!}{k(2n+2-k)} \in \mathbb{N} \quad \text{فإن :}$$

ومنه A_n يقبل القسمة على $(2n+2)$.

12

ليكن a عدد فردي من \mathbb{Z}

(1) $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$ بسر أ

(2) حل $a^2 \equiv 2 \pmod{8}$ المعادلة

الجواب : (1) a عدد فردي إذن : $\exists p \in \mathbb{Z} : a = 2p+1$

ومنه : $a^2 = 4p(p+1) + 1$

ملاحظة هامة : جداء n أعداد متتالية يقبل القسمة على n .

ومنه $p(p+1)$ يقبل القسمة على 2 أي : $\exists k \in \mathbb{Z} : p(p+1) = 2k$

ومنه : $m^2 \equiv 1 \pmod{8}$ أي $m^2 \equiv 8k+1$

(ب) لنحل في Z^2 المعادلة : $8x+1 = y^2$

لدينا $8x+1$ عدد فردي ، ومنه y^2 عدد فردي .

ملاحظة : m فردي $\Leftrightarrow m^2$ فردي .

ومنه : $y^2 = 8p+1$: $3p \in \mathbb{Z}$

إذن : $x = \frac{y^2-1}{8} = \frac{(8p+1)-1}{8}$

إذن : $x = \frac{p(8p+1)}{2}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي :

$S = \left\{ \left(\frac{p(8p+1)}{2}, 8p+1 \right) \mid p \in \mathbb{Z} \right\}$

13 لكن n من \mathbb{N} حيث : $n \geq 3$

يبقى أن 2^n لا يقسم العدد 3^n+1 .

الجواب : لدينا $3^0 \equiv 1 \pmod{2}$; $3^1 \equiv 3 \pmod{2}$; $3^2 \equiv 1 \pmod{2}$

ومنه لكل n من \mathbb{N} : $3^n \equiv 1 \pmod{2}$ أو $3^n \equiv 3 \pmod{2}$

ومنه لكل n من \mathbb{N} $3^n+1 \equiv 2 \pmod{2}$ أو $3^n+1 \equiv 4 \pmod{2}$

إذن 2 لا تقسم 3^n+1

ومنه لكل n من \mathbb{N} حيث : $n \geq 3$

$2^n = 8 \cdot 2^{n-3}$ لا يقسم العدد 3^n+1 .

14 يسأل : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n \mid (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$

الجواب : نصح : $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$u_n = x_1^n + x_2^n$

لدينا (u_n) هي متتابعة توحيدة خطية من الدرجة الثانية معاملاتنا

ثباته ، ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} - (2+2i)u_{n+1} + 2iu_n = 0$

أي : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0$

لنثبت بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in \mathbb{Z}$

لنبدأ : $u_0 = 2$ و $u_1 = 3$

نعمرص أن لكل $n \geq 2$: $u_n \in \mathbb{Z}$ ، نثبت أن : $u_{n+2} \in \mathbb{Z}$

لنبدأ : $u_{n+2} \in \mathbb{Z}$ و $u_n \in \mathbb{Z}$ ، ومنه : $3u_{n+1} - u_n \in \mathbb{Z}$

أي : $u_{n+2} \in \mathbb{Z}$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in \mathbb{Z}$

$3p \in \mathbb{Z}$ $u_n = \frac{(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n}{2^n} = p$

أي : $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = 2^n \cdot p$

وبالتالي : $2^n \mid (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$

ملاحظة : هناك طريقة نستخدم فيها الصيغة العكسية .

15 حل جز \mathbb{Z}^4 المعادل : $x_4 = 2x + 3y$ (E)

الجواب : لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E) .

لدينا : $(x, y) \in S \Leftrightarrow x_4 = 2x + 3y$

$\Leftrightarrow x(y-2) - 3(y-2) - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(y-2) = 6$

$(x, y) \in S \Leftrightarrow$

{	$x-3=6$	؛	$x-3=1$
	$y-2=1$		$y-2=6$
	$x-3=-6$		$x-3=-1$
	$y-2=-2$		$y-2=-6$
	$x-3=2$		$x-3=3$
	$y-2=3$		$y-2=2$
{	$x-3=-2$	؛	$x-3=-3$
	$y-2=-3$		$y-2=-2$

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow (x, y) \in \{(3, 3), (4, 8), (-3, 1), (2, -4), (5, 5), (6, 4), (1, -2), (0, 0)\}$$

$$S = \{(-3, 1), (2, -2), (2, -4), (0, 0), (4, 8), (5, 5), (6, 4), (3, 3)\}$$
 وبالنسبة

16 حل في \mathbb{Z}^4 المعادلة: (F): $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$

الجواب: لتكن S مجموعة حلول المعادلة (F).

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow xy = 5(x + y) \quad \text{لدينا.}$$

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow (x-5)(y-5) = 25$$

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow (x, y) \in \{(-20, 4), (4, -20), (6, 30), (10, 10), (30, 6)\}$$

$$S = \{(-20, 4), (4, -20), (6, 30), (10, 10), (30, 6)\} \quad \text{ومنه.}$$

17 تبسيط في المعادلة (G): $x^3 + xy + y^3 = 209$

ولتكن S مجموعة حلول المعادلة (G).

(1) ليكن (x, y) عندها S .

$$1- \text{بين أن: } y \leq 5$$

$$2- \text{بين أن: } x \geq 5$$

(2) استنتج المجموعة S .

الجواب: (1) 1- لدينا: $(x, y) \in S \Leftrightarrow x^3 + xy + y^3 = 209$

$$\Rightarrow y^3 \leq 209 \quad (\text{لأن: } x \geq 0 \text{ و } y \geq 0)$$

$$\Rightarrow y \leq 5 \quad (\text{لأن: } 209 \leq 5^3)$$

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow (y, x) \in S \quad \text{لدينا:}$$

ومنه يمكننا أن نفترض أن $x \leq y$

$$(x, y) \in S \Rightarrow x^3 + xy + y^3 = 209 \quad \text{لأن:}$$

$$(x, y) \in S \Rightarrow 209 \leq y^3 + y^2 + y^3 \quad (x \leq y : \text{حالة 1})$$

$$(x, y) \in S \Rightarrow 209 \leq 3y^3 \quad (y \geq x : \text{حالة 2})$$

$$(x, y) \in S \Rightarrow y^3 \geq \frac{209}{3}$$

$$(x, y) \in S \Rightarrow y \geq 5 \quad \text{ومن هنا:}$$

$$(x, y) \in S \Rightarrow y \leq 5 \quad \text{و} \quad y \geq 5 \quad \text{لدينا: (1) حسب السؤال}$$

$$(x, y) \in S \Rightarrow y = 5$$

$$(x, y) \in S \Rightarrow x^3 + 5x + 5^3 = 209$$

$$(x, y) \in S \Rightarrow x = 4$$

$$S = \{(4, 5); (5, 4)\} \quad \text{وبالتالي:}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \quad [6] \quad \text{1. سنأب}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : n^2(n^2-1) \equiv 0 \quad [4] \quad \text{2. نيبأب}$$

18

الجواب: (1) ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، نضع: $\mu_n = n(2n+1)(7n+1)$

نلخص البرهان في الجدول التالي:

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$2n+1 \equiv$	1	3	5	1	3	5	[6]
$7n+1 \equiv$	1	2	3	4	5	0	[6]
$\mu_n \equiv$	0	0	0	0	0	0	[6]

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu_n \equiv 0 \quad [6] \quad \text{ومن هنا:}$$

$$v_n = n^2(n^2-1) \quad \text{(2) ليكن } n \in \mathbb{N}^* \text{، نضع:}$$

$$v_n = n(n-2) \cdot n(n+2) \quad \text{ومن هنا:}$$

$$\text{وبما أن: } n(n-2) \text{ و } n(n+2) \text{ يتقبلان القسمة على 2}$$

$$\text{فإن: } \exists (d, p) \in \mathbb{N}^2 : n(n+2) = 2d \quad \text{و} \quad n(n-2) = 2p$$

$$v_n = 4dp \quad \text{ومن هنا:}$$

$$4 \mid v_n. \quad \text{لذا فإن:}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : v_n \equiv 0 \quad [4] \quad \text{وبالتالي:}$$

عدد مجموعة الأعداد الموجبة الطبيعية n التي من أجلها يكون

19

لدينا (2) $2 \cdot 3^n + 3 \equiv 0 \quad [11] \quad (2)$

(2) $5^{6n} + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7] \quad (2)$

الجواب (2) لدينا: $3 \equiv 3 \quad [11] \quad 3^0 \equiv 1 \quad [11]$

$3^3 \equiv 5 \quad [11] \quad 3^4 \equiv 9 \quad [11]$

$3^5 \equiv 2 \quad [11] \quad 3^4 \equiv 4 \quad [11]$

ومن هنا نرى أنه لدينا: $3^{5k+1} \equiv 3 \quad [11] \quad 3^{5k} \equiv 1 \quad [11]$

$3^{5k+3} \equiv 5 \quad [11] \quad 3^{5k+2} \equiv 9 \quad [11]$

$3^{5k+4} \equiv 4 \quad [11]$

لدينا: $2 \cdot 3^n + 3 \equiv 0 \quad [11] \Leftrightarrow 2 \cdot 3^n \equiv -3 \quad [11]$

$2 \cdot 3^n + 3 \equiv 0 \quad [11] \Leftrightarrow 2 \cdot 3^n \equiv 8 \quad [11]$

$2 \cdot 3^n + 3 \equiv 0 \quad [11] \Leftrightarrow n = 5k + 4 \mid k \in \mathbb{N} \quad (\text{مبدأ باينف})$

(2) لدينا: $5^2 \equiv 5 \quad [7] \quad 5^0 \equiv 1 \quad [7]$

$5^3 \equiv 6 \quad [7] \quad 5^4 \equiv 4 \quad [7]$

$5^5 \equiv 3 \quad [7] \quad 5^6 \equiv 2 \quad [7]$

$5^6 \equiv 1 \quad [7]$

ومن هنا نرى أنه لدينا: $5^{6k} \equiv 1 \quad [7] \quad 5^{6k+1} \equiv 5 \quad [7]$

$5^{6k+3} \equiv 6 \quad [7] \quad 5^{6k+2} \equiv 4 \quad [7]$

$5^{6k+5} \equiv 3 \quad [7] \quad 5^{6k+4} \equiv 2 \quad [7]$

$5^{6n} + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7] \Leftrightarrow (5^6)^n + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7]:$

$5^{6n} + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7] \Leftrightarrow 1 + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7]$

$5^{6n} + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7] \Leftrightarrow 5^n \equiv -3 \quad [7]$

$5^{6n} + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7] \Leftrightarrow 5^n \equiv 4 \quad [7]$

$5^{6n} + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7] \Leftrightarrow n = 6k + 2 \mid k \in \mathbb{N}$

$$(n+2) \mid n^2 - 3n + 2$$

الجواب: لدينا: $(n+2) \mid n^2 - 3n + 2 \Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 \equiv 0 \pmod{n+2}$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 4 + 5 \equiv 0 \pmod{n+2}$$

$$\Leftrightarrow (n+2)(n-4) + 5 \equiv 0 \pmod{n+2}$$

$$\Leftrightarrow 5 \equiv 0 \pmod{n+2} \quad (n+2 \mid (n+2)(n-4) + 5)$$

$$\Leftrightarrow n+2 \mid 5$$

$$\Leftrightarrow n+2 \in \{-5, -2, 1, 5\}$$

$$\Leftrightarrow n \in \{-6, -2, 0, 4\}$$

(1) حل 3 المعادله $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

(2) حل 3 المعادله $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ بالنسبة

$$(S_2) \begin{cases} 3x + 2y = \bar{1} \\ 2x + 4y = \bar{3} \end{cases}$$

(3) حل 3 المعادله $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

$$(E_3) \quad x^2 - x - \bar{2} = \bar{0}$$

الجواب: (1) ندرج الجدول التالي لحل المعادله (E1).

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$4x$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$4x - \bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

وما حلل الجدول نستنتج أن $\bar{2}$ هو الحل الوحيد للمعادله (E1).

$$S_1 = \{\bar{2}\} \quad \text{اذن:}$$

(2) لدينا: $(x, y) \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} 3x + 2y = \bar{1} \\ 2x + 4y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{3} + \bar{2})x + (\bar{2} + \bar{4})y = \bar{1} + \bar{3} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \bar{4} \\ \bar{2}x + \bar{1} = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{1} \\ y = \bar{4} \end{cases}$$

و منه مجموعة حلول النظام (S_2) هي:

$$S_2 = \{(\bar{1}, \bar{4})\}$$

(3) لدينا: $x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$x^2 - x - \bar{2} = \bar{0} \Leftrightarrow x^2 - \bar{1}x - \bar{2} = \bar{0}$$

$$x^2 - x - \bar{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \bar{4}x - \bar{2} = 0 \quad (-\bar{2} = \bar{4} \text{ : } \frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow (x + \bar{2})^2 - \bar{1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \bar{2})(x + \bar{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \bar{2} = 0 \quad \text{أو} \quad x + \bar{3} = 0 \quad (\text{العدد 5 عدد أولي})$$

$$\Leftrightarrow x = -\bar{2} = \bar{4} \quad \text{أو} \quad x = -\bar{3} = \bar{2}$$

والنسبة مجموعة حلول المعادلة (E_3) : $S_3 = \{\bar{4}, \bar{2}\}$

$$\forall x \in \mathbb{Z}$$

$$x^3 \equiv x \quad [3]$$

(1) يجب أن

22

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2$$

$$xy(x^2 - y^2) \equiv 0 \quad [3]$$

(2) استنتج أن

الجواب (3) نستخدم الجدول التالي، وذلك في المجموعة $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

\bar{x}	\bar{x}^3
$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{8} = \bar{2}$

$$\forall x \in \mathbb{Z}$$

$$x^3 \equiv x \quad [3]$$

ومن هنا نستنتج أن

$$xy(x^2 - y^2) \equiv x^3y - xy^3 \quad [3]$$

(2) لدينا لكل x, y من \mathbb{Z}

$$xy(x^2 - y^2) \equiv x^3y - xy^3 \quad [3]$$

$$\begin{pmatrix} x^3 \equiv x \quad [3] \\ y^3 \equiv y \quad [3] \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$xy(x^2 - y^2) \equiv 0 \quad [3]$$

وبالتالي،

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

لكن n من \mathbb{N}^* ، نصح :

23

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_n \mid 2^{F_n} - 2$$

يجب أن :

الجواب . لكل n من \mathbb{N}^* لدينا $F_n \mid 2^{F_n} - 2$ $\Leftrightarrow F_n \mid 2^{2^n} + 1 - 2$ $[F_n]$

$$\Leftrightarrow 2^{2^n} \equiv -1 \quad [F_n]$$

$$2^{F_n} = 2^{2^{2^n} + 1} = 2 \cdot 2^{2^{2^n}} = 2 \cdot (2^{2^n})^{2^{2^n} - 1}$$

ولدينا :

$$2^{F_n} \equiv 2 \cdot (-1)^{2^{2^n} - 1} \quad [F_n] \quad \text{فإن} \quad 2^{2^n} \equiv -1 \quad [F_n] \quad \text{وبما أن}$$

$$(2^{2^n})^{2^{2^n} - 1} \equiv (-1)^{2^{2^n} - 1} \equiv 1 \quad [F_n] \quad \text{وحيث}$$

منه،

$$F_n \mid 2^{F_n} - 2 \quad \text{بالتالي} \quad 2^{F_n} - 2 \equiv 0 \quad [F_n] \quad \text{لأن}$$

24 ندرس المعادلة: $(E) \quad x^3 - 3y^3 + 6y^2 - 16x + 8 = 0$

ولكن في مجموعة حلولها.

(1) سأل $\forall x \in \mathbb{Z} \quad x^3 - x - 1 \equiv -1 \quad [3]$

(2) استنتج أن: $S = \emptyset$.

الجواب: (1) ليكن x من \mathbb{Z} لدينا:

$x^3 - x - 1 \equiv -1 \quad [3] \Leftrightarrow x^3 - x \equiv 0 \quad [3]$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1) \equiv 0 \quad [3]$

نعلم أن جداء ثلاثة أعداد مربعة يقبل القسمة على 3

وبما أن $x-1, x, x+1$ أعداد مربعة فإن $x(x-1)(x+1) \equiv 0 \quad [3]$.

منه: $x^3 - x - 1 \equiv -1 \quad [3]$

(2) ندرس ما إذا $S \neq \emptyset$ ، منه يوجد (x, y) من \mathbb{Z}^2 بحيث:

$x^3 - 3y^3 + 6y^2 - 16x + 8 = 0$

$x^3 - 3y^3 + 6y^2 - 16x + 8 \equiv 0 \quad [3]$

أي $x^3 - x - 1 \equiv 0 \quad [3]$ (بما أن $3y^3 \equiv 0 \quad [3]$ ؛ $-16x \equiv -x \quad [3]$ ؛ $8 \equiv 2 \quad [3]$)

مما استنتجنا مع كون $x^3 - x - 1 \equiv -1 \quad [3]$

وبالتالي: $S = \emptyset$.

25 ندرس المعادلة: $(E) \quad x^2 + 5y^2 = 3$

ولكن في مجموعة حلول المعادلة (E)

(1) سأل $(x, y) \in S \Rightarrow x^2 = 3$

(2) استنتج المجموعة S

الجواب: (1) لدينا: $(x, y) \in S \Leftrightarrow x^2 + 5y^2 = 3$

$\Leftrightarrow x^2 = 3 - 5y^2$

$\Rightarrow 3 - 5y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{3}{5}$

$\Rightarrow |y| < 1 \Leftrightarrow y = 0 \quad (y \in \mathbb{Z}; 0 \leq y)$

منه: $x^2 = 3$

(2) ليكن $(x, y) \in S$ إذا $x^2 = 3$

وبما أن المعادلة: $x^2 = 3$ لا تقبل حلاً في Z فإن: $3 = \phi$

نضع: $A = Z/\mathfrak{m}Z$

26

(أ) ناقش حسب قيم a عدد حلول المعادلة: $x^2 = a$: $x \in A$: حيث: $a \in A$.

(ب) ليكن p و q من A ، نعتبر المعادلة: $x^2 - 2px + q = 0$:
 من أن المعادلة (ب) تقبل حلاً إذا وفقط إذا كان $p^2 - q$ تنتمي إلى مجموعة B حيث A يتيم تعديدها.

(ج) تثقيب: 1- حل في A المعادلة: $x^4 + 3x^2 + 4 = 0$:
 ب- حدد الأعداد الصحيحة المربعة x بحيث:
 11 يقسم (x) 10304.

الاجواب: (أ) من خلال الجدول نعطى لـ a المربعان عناصر A .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

- المعادلة (ب) تقبل حلاً وحيداً إذا كان: $a = 0$

- المعادلة (ب) تقبل حين مختلفين إذا كان: $a \in \{1, 3, 4, 5, 9\}$

- المعادلة (ب) لا تقبل حلاً إذا كان: $a \in \{2, 6, 7, 8, 10\}$

(د) لكل x من A لدينا: $x^2 - 2px = (x-p)^2 - p^2$

لدينا: $x^2 - 2px + q = 0 \Leftrightarrow (x-p)^2 = p^2 - q$

إذاً المعادلة (ف) تقبل حلاً في A إذا وفقط إذا كان: $p^2 - q \in \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$

منه: $B = \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$

(3) 1- لنحل المعادلة (ج): نضع: $x = x^2$

لدينا: (ج) $\Leftrightarrow x^2 + 3x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x+4)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x+4 = 1$ أو $x+4 = 10 \Leftrightarrow x=5$ أو $x=3$

$$(G) \Leftrightarrow x^2 = \bar{5} \quad , \quad x^2 = \bar{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \bar{4} \quad \text{أو} \quad x = \bar{7} \quad \text{أو} \quad x = \bar{5} \quad \text{أو} \quad x = \bar{6}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (G) هي: $S = \{\bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$$10304 \overline{) (x)} = x^4 + 3x^2 + 4 \quad \text{ب - لدينا:}$$

$$11 \overline{) 10304}^{(x)} \Leftrightarrow x^4 + 3x^2 + 4 \equiv 0 \quad [11] \quad \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}^4 + \bar{3}\bar{x}^2 + \bar{4} = \bar{0} \quad (\bar{x} \in A)$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} \in \{\bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$$

$$11 \overline{) 10304}^{(x)} \Leftrightarrow x = 4 + 11k \quad \text{أو} \quad x = 5 + 11k \quad \text{أو} \quad x = 6 + 11k \quad \text{أو} \quad x = 7 + 11k$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

$$(1) \quad 6x - 13y = 5 \quad \text{حل في } \mathbb{Z} \text{ للمعادلة} \quad \mathbf{27}$$

$$(2) \quad \begin{cases} y \equiv 2 & [6] \\ y \equiv 7 & [13] \end{cases} \quad \text{استنتج في } \mathbb{Z} \text{ حلول النظم}$$

$$(3) \quad \begin{cases} y \equiv 2 & [6] \\ y \equiv 7 & [13] \\ y \equiv 1 & [7] \end{cases} \quad \text{حل في } \mathbb{Z} \text{ النظم التالية}$$

$$\text{الجواب : (1) لدينا : (3, 1) حلًا خاصًا للمعادلة} \quad 6x - 13y = 5$$

$$\text{ومنه :} \quad \begin{cases} 6x - 13y = 5 \\ 6 \cdot 3 - 13 \cdot 1 = 5 \end{cases}$$

$$\text{لاحظ :} \quad 6(x-3) = 13(y-1) \quad \text{ومنه :} \quad 6 \mid 13(y-1)$$

$$\text{مما أعني :} \quad 6 \wedge 13 = 1 \quad \text{حيث يجب مبرهنه كذا}$$

$$\text{لاحظ :} \quad y = 1 + 6k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{وبتعويضنا نحصل على :} \quad x = 3 + 13k$$

$$\text{عكسًا يمكننا أن نتحقق من أن الزوج } (3 + 13k, 1 + 6k) \text{ للمعادلة (1)}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي :

$$S_1 = \{(3 + 13k, 1 + 6k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{cases} z \equiv 2 \pmod{6} \\ z \equiv 7 \pmod{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + 6x \\ z = 7 + 13y \end{cases} \quad | (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{لدينا: (1)}$$

$$2 + 6x = 7 + 13y \quad \text{لأنه:}$$

$$6x - 13y = 5 \quad \text{ومن:}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 + 13k \quad ; \quad y = 2 + 6k \quad | k \in \mathbb{Z}$$

$$z = 20 + 78k \quad | k \in \mathbb{Z} \quad \text{ومن:}$$

$$(k \in \mathbb{Z}) \quad z = 20 + 78k \quad \text{وعكسياً:}$$

$$20 + 78k \equiv 2 \pmod{6} \quad ; \quad 20 + 78k \equiv 7 \pmod{13} \quad \text{لأن:}$$

$$S_2 = \{ 20 + 78k \mid k \in \mathbb{Z} \} \quad \text{بالتالي مجموعة حلول المعادلة (2) هي:}$$

$$\begin{cases} z \equiv 2 \pmod{6} \\ z \equiv 7 \pmod{13} \\ z \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 20 + 78k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 20 + 78k \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} \quad \text{لحل النقطة (3):} \\ \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 20 + 78k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ k \equiv 2 \pmod{7} \end{cases} \quad \text{لأن:} \quad \begin{pmatrix} 20 \equiv 6 \pmod{7} \\ 78 \equiv 1 \pmod{7} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 20 + 78k \\ k = 2 + 7\alpha \quad | (\alpha \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = 176 + 564\alpha \quad | (\alpha \in \mathbb{Z})$$

$$S_3 = \{ 176 + 564\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z} \} \quad \text{بالتالي مجموعة حلول المعادلة (3) هي: (ب)}$$

28 $a = 2^{18} + 1$ عدد غير أولي **يبين أن العدد**

الجواب: لدينا: $a = 2^{18} + 1 = (2^6)^3 + 1 = (2^6 + 1)(2^{12} - 2^6 + 1)$

ومن: $2^{18} + 1$ قابل القسمة على $2^6 + 1 + 1$ فإن $a = 2^{18} + 1$ غير أولي.

29 $a_n = n^4 - n^2 + 16$ **لكن n من \mathbb{Z} نتبع:**

(1) $a_n = n^4 - n^2 + 16$ **من أ.ب.** $n^2 - 3n + 4$ $;$ $n^2 + 3n + 4$ **عدداً زوجان**

(2) **استنتج أن a_n عدد غير أولي.**

الجواب: (1) **ليكن n من \mathbb{Z} لدينا:**

$$n^2 - 3n + 4 \equiv n^2 - n \pmod{2}$$

$$\equiv n(n-1) \pmod{2}$$

بما أن حداث عددان متساويان قابل للتقسمة على 2 فإن : $n(n-1) \equiv 0 \pmod{2}$

ومنه : $n^2 - 3n + 4 \equiv 0 \pmod{2}$ أي $n^2 - 3n + 4$ قابل للتقسمة على 2

لأن : $n^2 - 3n + 4$ عدد زوجي .

لدينا : $n^2 + 3n + 4 \equiv n^2 + n \pmod{2}$

$n^2 + 3n + 4 \equiv n(n+2) \pmod{2}$

$n^2 + 3n + 4 \equiv 0 \pmod{2}$

ومنه : $n^2 + 3n + 4$ عدد زوجي .

(2) لدينا : $a_n = n^4 - n^2 + 16 = (n^2 + 4)^2 - 9n^2$

$a_n = (n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4)$

بما أن : $n^2 + 3n + 4 \equiv n^2 - 3n + 4$ زوجيان فإن :

$n^2 + 3n + 4 \not\equiv 1$ و $n^2 - 3n + 4 \not\equiv 1$

وبالتالي a_n عدد غير أولي .

30

لكل n من $\{1, 3, 5, \dots\}$

سن الاستلزام التالي : n عدد أولي $\Rightarrow 5^n - 3^n$ عدد أولي

الاجواب : ليكن n من $\{1, 3, 5, \dots\}$

لنبرهن على ذلك باستخدام الاستلزام العكس

أي : $5^n - 3^n$ عدد غير أولي $\Rightarrow n$ عدد غير أولي

n عدد غير أولي لأن : $n = p \cdot q$ $\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^* - \{1\})^2$

لأن : $5^n - 3^n = 5^{pq} - 3^{pq} = (5^p)^q - (3^p)^q$

$= (5^p - 3^p) \left(\sum_{k=0}^{q-1} (5^p)^k (3^p)^{(q-1-k)} \right)$

بما أن : $5^p - 3^p \geq 2$ $\sum_{k=0}^{q-1} (5^p)^k (3^p)^{(q-1-k)} \geq 2$

ومنه $5^n - 3^n$ عدد غير أولي

وبالتالي

n عدد أولي $\Rightarrow 5^n - 3^n$ عدد أولي

31 ليكن p عدد أولي حيث $p \geq 5$

(2) $3 \mid p^2 - 1$ مبين أن

(3) $8 \mid p^2 - 1$ مبين أن

(3) استنتج أن $24 \mid p^2 - 1$

الجواب : (2) نضع : $a = p(p^2 - 1)$

لدينا : $a = p(p-1)(p+1)$

بما أن a هو عدد ثلاث أعداد متتالية فإن $3 \mid a$ أي $3 \mid p(p^2 - 1)$

وبما أن p أولي و $p > 3$ فإن 3 لا تقسم p ، ومنه $p \wedge 3 = 1$

لذا :
$$\begin{cases} 3 \mid p(p^2 - 1) \\ p \wedge 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3 \mid p^2 - 1$$

(2) لدينا p أولي ، لذا يكتب على أحد الشكلين : $p = 4k+1$ أو $p = 4k+3$ (k عد)

الحالة 1 : إذا كان : $p = 4k+1$ فإن : $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$

لذا : $p^2 - 1 = 8k(2k+1)$ ، ومنه : $8 \mid p^2 - 1$

الحالة 2 : إذا كان : $p = 4k+3$ فإن : $p^2 - 1 = 8(k+1)(2k+1)$

ومنه : $8 \mid p^2 - 1$

وبالتالي : $8 \mid p^2 - 1$ لكل p أولي حيث $p \geq 5$.

(3)
$$\begin{cases} 3 \mid p^2 - 1 \\ 8 \mid p^2 - 1 \\ 3 \wedge 8 = 1 \end{cases}$$
 مبين أن : $24 \mid p^2 - 1$

32 ليكن a و n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$

(1) $a^n - 1 \Rightarrow a = 2$ مبين أن

(2) $a^n - 1 \Rightarrow n$ أولي مبين أن

(3) $a^n + 1 \Rightarrow a$ زوجي مبين أن

الجواب : (1) لتبين أن : $a^n - 1 \Rightarrow a = 2$ غير أولي $a \neq 2 \Rightarrow$

لدينا : $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$

بما أن : $a \neq 2$ فإن : $a-1 \neq 1$ إذن : $a-1 \mid a^n-1$ ومنه : a^n-1 غير أولي .

وبالتالي : $a^n-1 \Rightarrow a=2$

(2) لنبين أن : a^n-1 غير أولي $\Rightarrow n$ غير أولي

$\exists (d,p) \in \mathbb{N}^2 : n = dp$ $\exists 1 < p < n$ $\exists 1 < d < n \Leftrightarrow$ غير أولي n
 $a^n-1 = a^{dp}-1 = (a^d)^p-1$ إذن :

ومنه : $a^n-1 \mid a^d-1$ \exists $a^n-1 \neq 1$ \exists $a^d-1 \neq 1$ \exists a^n-1 غير أولي .

وبالتالي : $a^n-1 \Rightarrow n$ أولي

(3) لنبين أن : a^n+1 غير أولي $\Rightarrow a$ فردي .

لدينا a فردي ومنه a^n فردي وبالتالي a^n+1 عدد زوجي

وبما أن $a^n+1 \neq 2$ (لأن : $a > 1$)

فإن a^n+1 يقبل القسمة على 2 ومنه a^n+1 غير أولي .

33 لكل a, b و n \mathbb{Z}^* و $m \in \mathbb{N}^*$.

(1) $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$ يسأل

(2) استنتج أن $a^n \mid b^n \Leftrightarrow a \mid b$

(3) يبأن : $\forall x \in \mathbb{Q}^* (x^n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z})$

الجواب : (1) نفع : $a = a \wedge b$

ومنه : $\exists (d,p) \in \mathbb{Z}^2 : a = dd$ $\exists b = dp$ $\exists d \wedge p = 1$

لدينا : $a^n \wedge b^n = a^n a^n \wedge a^n p^n = a^n (a^n \wedge p^n)$

بما أن : $a \wedge p = 1 \Leftrightarrow a^n \wedge p^n = 1$

فإن : $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$ أي : $a^n \wedge b^n = a^n$

(2) لدينا : $a^n \mid b^n \Leftrightarrow a^n \wedge b^n = |a^n| \Leftrightarrow (a \wedge b)^n = |a^n|$

$a^n \mid b^n \Leftrightarrow a \wedge b = |a| \Leftrightarrow a \mid b$

(3) ليكن x من \mathbb{Q}^* $x = \frac{a}{b}$ $\exists (a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$.

لدينا : $x^n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{a^n}{b^n} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a^n \mid b^n \Leftrightarrow a \mid b$

$x^n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

34 ليكن n من \mathbb{N}^* ، صم: $u_n = n^3 + n^2 + 11n + 2$

(1) بب أن: $u_n \equiv 0 \pmod{3}$ أو $u_n \equiv 2 \pmod{3}$

(2) استنتج جميع الأعداد n التي من أجلها يكون لدينا:

n عدد أولي و u_n عدد أولي.

الجواب: (1) لدينا:

$n \equiv$	-1	0	1	$[3]$
$n^2 \equiv$	-1	0	1	$[3]$
$n^3 \equiv$	1	0	1	$[3]$
$11n \equiv$	1	0	-1	$[3]$
$u_n \equiv$	0	2	0	$[3]$

من هذا الجدول نستنتج أن

$u_n \equiv 0 \pmod{3}$ أو $u_n \equiv 2 \pmod{3}$

(2) n عدد أولي، لكي يكون u_n عدد أولي وحسب الـ السابق
 u_n عدد أولي يجب أن يكون $u_n \equiv 2 \pmod{3}$ وبما أن $u_n > 3$
 فإن: $u_n \equiv 2 \pmod{3}$ و p عدد أولي، ومنه: $p = 3$.

35 ليكن a و b من \mathbb{N}^* ، صم: $A = \frac{a^3 + b^3}{2}$

نفرض أن A عدد أولي

(1) بين أن $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{N}$ و $a^2 - ab + b^2 \in \mathbb{N}$

(2) استنتج أن: $a+b=2$ أو $a^2 - ab + b^2 = 1$

(3) بين أن: $a=b=1$

الجواب: (1) بما أن A عدد أولي فإن: $A \in \mathbb{N}$

- إذا كان a و b زوجان فإن: $a=2p$ و $b=2p$ و $(a,p) \in \mathbb{N}^2$

وذن: $A = 4(p^3 + p^3)$

ومنه: $4 \mid A$ غير ممكن لأن A عدد أولي، إذن a و b غير زوجيان.

- إذا كان a زوجي و b فردي فإن: $a^2 + b^2$ عدد فردي

وذن: $a^2 + b^2$ لا يقبل القسمة على A

وإذن: $A = \frac{a^3 + b^3}{2} \notin \mathbb{N}$ سابق مع كون A عدد أولي.

وبالعقل إذا كان a فردي و b زوجي فإن $A \notin \mathbb{N}$ تناقض مع كون A أولي.

وبالتالي فإن: a و b فرديان ومنه $a+b$ زوجي إذن $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{N}$.

$$\text{لدينا: } a^2 - ab + b^2 = a^2 + b(b-a) = a(a-b) + b^2$$

بما أن a و b يلعبان دوراً مماثلًا يمكن أن نفترض أن $a \geq b$.

ومنه: $a(a-b) + b^2 \geq 0$ وبالتالى: $a^2 - ab + b^2 \in \mathbb{N}$.

$$\text{لدينا: } A = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}(a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

بما أن $\frac{1}{2}(a+b) \in \mathbb{N}$ و $a^2 - ab + b^2 \in \mathbb{N}$ و A عدد أولي

$$\text{فإن: } \frac{1}{2}(a+b) = 1 \quad \text{أو} \quad a^2 - ab + b^2 = 1$$

$$\text{أي: } a+b = 2 \quad \text{أو} \quad a^2 - ab + b^2 = 1$$

(3) بما أن A عدد أولي فإن: $a+b = 2$ أو $a^2 - ab + b^2 = 1$

$$* \text{ إذا كان: } a+b = 2 \quad \text{فإن: } (a-1) + (b-1) = 0$$

وبما أن: $a-1 \geq 0$ و $b-1 \geq 0$ فإن: $a-1=0$ و $b-1=0$

$$\text{أي: } a=1 \quad \text{و} \quad b=1$$

ملاحظة: ليكن a, b من \mathbb{N} لدينا الشافو التالي: $a+p=0 \Leftrightarrow a=p=0$

$$* \text{ إذا كان: } a^2 - ab + b^2 = 1 \quad \text{فإن: } 4a^2 - 4ab + 4b^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 + 3b^2 = 4 \Leftrightarrow (2a-b)^2 + 3b^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow [(2a-b)^2 - 1] + 3(b^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-b)^2 - 1 = 0 \quad \text{و} \quad 3(b^2 - 1) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} (2a-b)^2 - 1 \geq 0 \\ 3(b^2 - 1) \geq 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow |2a-b| = 1 \quad \text{و} \quad b^2 = 1 \quad (b \in \mathbb{N} \text{ و } a \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow (b=1 \text{ و } 2a-1=1) \quad \text{أو} \quad (b=1 \text{ و } 2a-1=-1)$$

$$\Leftrightarrow (b=1 \text{ و } a=1) \quad \text{أو} \quad (b=1 \text{ و } a=0)$$

$$\Leftrightarrow a=b=1$$

غير ممكن لأن $a \neq 0$

ليكن n من \mathbb{N} بحيث: $n \geq 4$.

36

نفترض أن: n و $n+2$ عددان أوليان.

(1) بين أن العدد $n-1$ يقبل القسمة على 3.

(2) استنتج أن العدد $n+1$ يقبل القسمة على 6.

الجواب : (1) لدينا n و $n+2$ عددان أوليان
وبما أن $n \geq 4$ فإن : n و $n+2$ لا يقبلان القسمة على 3.
إذا كان : $[3] \quad n \equiv 1$ فإن : $[3] \quad n+2 \equiv 0$ وهذا يناقض مع
كون $n+2$ لا يقبل القسمة على 3. ومنه : $[3] \quad n-1 \not\equiv 0$
وبالتالي 3 لا تقسم $n-1$.
(2) حسب السؤال (1) لدينا : $[3] \quad n \not\equiv 0$ و $[3] \quad n \not\equiv 1$
فإن : $[3] \quad n \equiv 2$ أي : $[3] \quad n \equiv -1$
منه : $3 \mid n+1$
وبما أن n عدد أولي و $n \geq 4$ فإن n عدد فردي
منه : $2 \mid n+1$
بما أن : $\begin{cases} 3 \mid n+1 \\ 2 \mid n+1 \end{cases}$ فإن : $2 \cdot 3 \mid n+1$ أي : $6 \mid n+1$
 $2 \cdot 3 = 6$

37 ليكن n من \mathbb{N} بحيث $n \geq 12$.
نضع : $a_n = n-40$ ، $b_n = n+40$ ، $c_n = n+60$ ، $d_n = n+90$
بين أنه إذا كان a_n و b_n و c_n أعداد أولية فإن d_n عدد أولي.
(يمكنك استعمال المواقعة سرديد 3)

الجواب : لدينا :
إذا : $[3] \quad a_n \equiv n-40$ ، $[3] \quad a_n \equiv n+40$ ، $[3] \quad b_n \equiv n+40$ ، $[3] \quad b_n \equiv n+40$ ، $[3] \quad c_n \equiv n+60$ ، $[3] \quad c_n \equiv n+60$ ، $[3] \quad d_n \equiv n+90$ ، $[3] \quad d_n \equiv n+90$
(إذا : $[3] \quad a_n \equiv n-40$ ، $[3] \quad a_n \equiv n+40$ ، $[3] \quad b_n \equiv n+40$ ، $[3] \quad b_n \equiv n+40$ ، $[3] \quad c_n \equiv n+60$ ، $[3] \quad c_n \equiv n+60$ ، $[3] \quad d_n \equiv n+90$ ، $[3] \quad d_n \equiv n+90$)

لدينا n و $n+2$ و $n+4$ أعداد متتالية ، ومنه أحد هذه الأعداد يقبل
القسمة على 3.
وبما أن a_n و b_n و c_n أعداد أولية فإن أحد آخرها يساوي 3.

وبما أن : $a_n < b_n < c_n$ فإن : $a_n = 3$ أي $n-20=3$ ومنه : $n=23$ ، إذن : $d_n = 13+30=103$ عدد أولي .

38 ليكن n من \mathbb{N} ، نضع $\sigma_n = 2^{2^n} + 5$

- (1) بين أنه لكل n من \mathbb{N}^* : $\sigma_n \geq 9$.
- (2) بين أنه لكل n من \mathbb{N}^* : $\sigma_n \equiv 1 \pmod{2}$.
- (3) استنتج جميع الأعداد الأولية التي تكب على شكل σ_n .

الجواب : (1) ليكن n من \mathbb{N}^* ، إذن : $n \geq 1$ ، ومنه : $2^n \geq 2$ ، ومنه : $\sigma_n \geq 9$ ،

(2) لدينا : (1) $2 \equiv -1 \pmod{2}$ ، بما أن 2^n عدد زوجي ، فإن : (2) $2^{2^n} \equiv (-1)^{2^n} \equiv 1 \pmod{2}$ ، أي : $\sigma_n \equiv 1 \pmod{2}$.

(3) لدينا لكل n من \mathbb{N}^* : (1) $2^{2^n} \equiv 1 \pmod{2}$.

أي : $\sigma_n \equiv 1+5 \pmod{2}$ ، أي : $\sigma_n \equiv 0 \pmod{2}$.

ومنه σ_n ليس أولياً ، أي لا يمكن أن يكون σ_n عدد أولي .

ويكون σ_0 أولياً إذا كان : $n=0$ ، أي : $\sigma_0 = 2^{2^0} + 5 = 7$ ، وبالمثل σ_n عدد أولي إذا وفقط إذا كان : $n=0$.

39 ليكن n من \mathbb{Z} ، نضع $\mu_n = n^3 - n^2 - 2n + 1$

الهدف من هذا التمرين أن نثبت أنه لكل n من \mathbb{Z} ، μ_n لا يقبل القسمة على 49 .

(1) نفترض أنه يوجد n_0 من \mathbb{Z} بحيث : $49 \mid \mu_{n_0}$.

أي : $7 \mid n_0 + 2$.

ب- استنتج أنه يوجد k من \mathbb{Z} بحيث : $\mu_{n_0} = 49(7k^3 - 7k^2 + 2k) - 7$.

(2) استنتج أن μ_n لا يقبل القسمة على 49 ، لكل n من \mathbb{Z} .

الجواب : (1) لدينا : $49 \mid \mu_{n_0}$

وبما أن : $\mu_{n_0} = n_0^3 - n_0^2 - 2n_0 + 1 = (n_0 + 2)^3 - 7n_0^2 - 4n_0 - 7$ ،

فإن : $7 \mid \mu_{n_0}$ ، أي : $7 \mid (n_0 + 2)^3 - 7n_0^2 - 4n_0 - 7$.

اذن : $7 \mid (n_0+2)^3$ وبما أن 7 عدد أولي فإن : $7 \mid n_0+2$

ب- لئلا : $7 \mid n_0+2$ إذن يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث : $n_0 = 7k - 2$

ونعوضها في μ_{n_0} نحصل على :

$$\mu_{n_0} = 49(7k^3 - 7k^2 + 2k) - 7$$

$$\text{وبما أن : } 49 \mid 49(7k^3 - 7k^2 + 2k) \text{ و } 49 \mid 7$$

فإن : وهذا يتناقض بافتراضنا خلافه

وبالتالي لا يوجد $n_0 \in \mathbb{Z}$ بحيث : $49 \mid \mu_{n_0}$

ومنه لكل $n \in \mathbb{Z}$ ، μ_n لا يقبل القسمة على 49 .

40 ليكن n من \mathbb{N} . نضع : $a_n = 2n^2 + 1$ و $p_n = 3n^2 + 2$

نريد تحديد المجموعة :

$$H = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \wedge p_n \neq 1\}$$

$$\text{نضع : } \sigma = a_n \wedge p_n$$

(1) بين أن : $\sigma \mid 8n+9$ و $\sigma \mid 1163$

(2) استنتج أنه يوجد m من \mathbb{N} بحيث : $8n+9 = 1163m$

(3) بين أن : $m \equiv 3 \pmod{5}$

(4) استنتج أنه يوجد b من \mathbb{N} بحيث : $n = 1163b + 435$

(5) حدد عناصر المجموعة H .

الجواب : (1) لدينا كل n من \mathbb{N} ، استعمال القسمة الطويلة لـ a_n على p_n :

$$9(2n^2+1) = (3n^2+2)(6n^2-4n) + 8n+9$$

$$9a_n = (6n^2-4n)p_n + 8n+9$$

$$\text{بما أن : } \sigma \mid a_n \text{ و } \sigma \mid p_n \text{ فإن : } \sigma \mid 8n+9$$

$$\text{ولئلا : } 512(3n^2+2) = (152n^2-216n+243)(8n+9) - 1163$$

$$\text{اذن : } 512p_n = (152n^2-216n+243)(8n+9) - 1163$$

$$\text{بما أن : } \sigma \mid p_n \text{ و } \sigma \mid 8n+9 \text{ فإن : } \sigma \mid 1163$$

(2) بما أن : $\sigma \mid 1163$ و $\sigma \neq 1$ ، عدد أولي (نصف هذا)

$$\text{فإن : } \sigma = 1163$$

دالة : $8n+9 = 1163a$: $1163 \mid 8n+9$: $a \in \mathbb{N}$: $8n+9 = 1163a$: حيث

(3) لدينا : $8n+9 = 1163a$: حيث $a \in \mathbb{N}$

$$1163a \equiv 9 \pmod{8}$$

$$(1163 \equiv 3 \pmod{8} \text{ ، } 9 \equiv 1 \pmod{8}) \quad 3a \equiv 1 \pmod{8}$$

$$3a \equiv 3 \pmod{8}$$

$$(3 \equiv 3 \pmod{8} \text{ ، } 1 \equiv 1 \pmod{8}) \quad a \equiv 1 \pmod{8}$$

(4) لدينا : $a \equiv 3 \pmod{8}$: $a = 3 + 8b$: $b \in \mathbb{N}$

$$8n+9 = 1163(3+8b)$$

$$8n+9 = 3489 + 8 \cdot 1163b$$

$$8n = 8(1163b + 435)$$

$$n = 1163b + 435$$

(5) $n \in \mathbb{N}$: $n = 435 + 1163b$: $b \in \mathbb{N}$

كيفية التحقق : $n = 435 + 1163b$: $b \in \mathbb{N}$

$$1163 \mid pn \quad ; \quad 1163 \mid n$$

$$n \wedge pn \neq 1$$

$$H = \{435 + 1163b \mid b \in \mathbb{N}\}$$

41 : $a = bc + d$: a, b, c, d أعداد من \mathbb{Z} : حيث

$$a \wedge b = b \wedge a$$

$$a \wedge b = b \wedge (a - bc)$$

الجواب : (1) نفع : $\Delta_2 = b \wedge d$ و $\Delta_1 = a \wedge b$

$$\Delta_2 / bc \quad \text{و} \quad \Delta_2 / a \quad \text{لأن} \quad \Delta_2 / b \quad \text{و} \quad \Delta_2 / a$$

$$\Delta_2 / b \wedge d \quad \text{لأن} \quad \Delta_2 / a - bc = d \quad \text{و} \quad \Delta_2 / b$$

$$\Delta_2 \mid \Delta_1$$

$$\Delta_2 \mid d \quad \text{و} \quad \Delta_2 \mid bc \quad \text{لأن} \quad \Delta_2 \mid d \quad \text{و} \quad \Delta_2 \mid b$$

$$\Delta_2 \mid a \wedge b \quad \text{لأن} \quad \Delta_2 \mid b \quad \text{و} \quad \Delta_2 / bc + d = a$$

2. 25

$$a \wedge b = b \wedge a \quad : \text{dim}, \Delta_1 = \Delta_2$$

(4) حسب المؤا، $d = a - bc$

لیکن n سے \mathbb{Z} : نفع $d_n = (5n^3 - n) \wedge (n+2)$

$$(5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$$

(2) ما هي القيم الممكنة للعدد d_n ؟

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n+2 \mid 5n^3 - n\}$$

(2) لدينا باستعمال القسمة الاقليدية "نحصل على"

$$5n^3 - n = (n+2)(5n^2 - 10n + 9) - 38$$

و عنه حمصب النمرى بن العاصف. (١٠٤)

$$(5n^3 - n) \wedge (n+2)^{11} = 1 \wedge (n+2)^{12} \wedge 38$$

$$dn = (n+2) \wedge 38 \quad : \text{وہو،}$$

$d_n \mid 38$: إذاً $d_n = (n+2) \wedge 38$: لدينا (2)

$$d_n \in \{1, 2, 19, 38\} \quad \text{cib}$$

$$n \in A \iff n+2 \mid 5n^3 - n \quad (3) \text{ لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow (5n^3 - n) \wedge (n+2) = |n+2|$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^d: \quad a \wedge b = |a| \iff a \mid b \quad \text{:"مقسومة"}$$

وبما أن : $(5n^2 - n) \wedge (n+2) \equiv (n+2) \wedge 38$ فإن :

$$n \in A \iff (n+2) \wedge 38 = |n+2|$$

$$\Leftrightarrow (n+2) \mid 38$$

$$\Leftrightarrow n+2 \in \{-38; -19, -2, -1, 1, 2, 19, 38\}$$

$$\Leftrightarrow n \in \{-40; -21; -4; -3; -1, 0; 17, 36\}$$

$A = \{-40; -24; -4; -3; -2; 17; 36\}$ وبالتالي:

43 لكن a و b من \mathbb{Z} ، و n من \mathbb{N}^*

(1) بين أن : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b) \wedge a = 1$

(2) بين أن : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a^n + b^n) \wedge a^n b^n = 1$

الجواب : (1) الطريقة الأولى : لدينا : $a+b = 1 \times a + b$

حسب القسمة (رقم) : لدينا : $(a+b) \wedge a = a \wedge b$

ومنه : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b) \wedge a = 1$

الطريقة الثانية : نعتبر أن : $a \wedge b = 1$ ، بين أن : $(a+b) \wedge a = 1$

نفع : $d = (a+b) \wedge a$:

لدينا : $\begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases} \Rightarrow d|b \quad \text{و} \quad \begin{cases} d|a \\ d|a+b \end{cases} \Rightarrow d|a$ إذن : $d|a \wedge b$

وبما أن : $a \wedge b = 1 \quad d \in \mathbb{N}^*$ فإن : $d = 1$

ومنه : $(a+b) \wedge a = 1$

عكسياً نعرض أن $(a+b) \wedge a = 1$ ، ليس أن $a \wedge b = 1$

نفع : $a \wedge b = 1$ ، [learnit.66ghz.com](http://www.learnit.66ghz.com)

لدينا : $\begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|a+b \end{cases}$ إذن : $d|(a+b) \wedge a$

وبما أن : $(a+b) \wedge a = 1$ و $d \in \mathbb{N}^*$ فإن : $d = 1$

ومنه : $a \wedge b = 1$

وبالتالي : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b) \wedge a = 1$

الطريقة الثالثة : (يمكن استعمال خاصية "بوزو")

(2) لدينا : $a^n \wedge b^n = 1 \Leftrightarrow a \wedge b = 1$ (حسب الدرس)

إذن : $a^n \wedge b^n = 1 \Leftrightarrow a^n \wedge (a^n + b^n) = 1$

$a^n \wedge b^n = 1 \Leftrightarrow b^n \wedge (a^n + b^n) = 1$ (حسب السؤال (1))

ومنه : $(a^n + b^n) \wedge a^n b^n = 1$

وبالتالي : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a^n + b^n) \wedge a^n b^n = 1$

44

لك a و b من \mathbb{Z}^* .

$$(a^2 + b^2) \wedge ab = 1 \quad \text{حيث} \quad a \wedge b = 1 \quad \text{من أجله إذا كان}$$

$$(a^2 + b^2) \wedge ab = (a \wedge b)^2 : \text{استنتج أن}$$

$$d = (a^2 + b^2) \wedge ab \quad \text{ضع (1) الجواب :}$$

$$d \mid a(a^2 + b^2) - b(ab) \quad \text{أي} \quad \begin{cases} d \mid a^2 + b^2 \\ d \mid ab \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$d \mid a^2 \quad \text{أي :}$$

$$d \mid b^2 \quad \text{وبالمثل نبيّن أن :}$$

$$d \mid a^3 \wedge b^3 \quad \text{بما أن} \quad d \mid a^2 \quad \text{و} \quad d \mid b^2 \quad \text{فيكون :}$$

$$d \mid 1 \quad \text{وبما أن} \quad : a^2 \wedge b^2 = 1 \Rightarrow a \wedge b = 1 \quad \text{فيكون :}$$

$$d = 1 \quad \text{أي :} \quad (d \in \mathbb{N} \quad \text{لأن :})$$

$$(a^2 + b^2) \wedge ab = 1 \quad \text{ومنه :}$$

$$d = a \wedge b \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^{*2} : a = du \quad ; \quad b = dv \quad ; \quad a \wedge b = 1 \quad \text{لدينا (2)}$$

$$(a^2 + b^2) \wedge ab = d^2 [(u^2 + v^2) \wedge uv] \quad \text{ومنه :}$$

$$(u^2 + v^2) \wedge uv = 1 \quad \text{و بما أن} \quad : a \wedge b = 1 \quad \text{حيث :} \quad (u, v) \text{ حسب السؤال (1)}$$

$$(a^2 + b^2) \wedge ab = d^2 \quad \text{ومنه :}$$

$$(a^2 + b^2) \wedge ab = (a \wedge b)^2 \quad \text{أي :}$$

لك a و b و c أعداد من \mathbb{Z}^* .

45

$$a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge (bc) = a \wedge c \quad \text{بيّن أن :}$$

$$d_1 = a \wedge bc \quad \text{و} \quad d_2 = a \wedge c \quad \text{نضع : الجواب :}$$

$$\begin{cases} d_1 \mid a \\ d_1 \mid bc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \mid a \\ d_1 \mid bc \end{cases} \Rightarrow d_1 \mid a \wedge bc = d_1 \quad \text{لدينا :}$$

$$: \text{لدينا} \quad a \wedge b = 1 \quad \text{لأن حسب مبرهنة Bezout}$$

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^{*2} : \quad au + bv = 1$$

$$ac u + bc v = c \quad \text{ومنه :}$$

$$\begin{cases} d_1 | a \\ d_2 | bc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 | a \\ d_2 | ac + bc = c \end{cases} \Rightarrow d_2 | a \wedge c = d_2 \quad \text{لدينا:}$$

$$d_1 = d_2 \quad \text{بما أن} \quad \begin{cases} d_1 | d_2 \\ d_2 | d_1 \\ (d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2 \end{cases} \quad \text{أي:}$$

$$a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge (bc) = a \wedge c \quad \text{وبالتالي:}$$

46 لتكن a و b و c أعداداً من \mathbb{Z}

$$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \\ b \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow (ab + bc + ca) \wedge abc = 1 \quad \text{سي أن:}$$

الجواب: نفع: $d = (ab + bc + ca) \wedge a$:
 $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \\ b \wedge c = 1 \end{cases}$:
 $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow a \wedge bc = 1$:
 لذا:

$$\begin{cases} d | a \\ d | ab + bc + ca \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | a(b+c) = ab + ac \\ d | ab + bc + ca \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

$$\begin{cases} d | a \\ d | bc \end{cases} \Rightarrow d | a \wedge bc \quad \text{وبما:}$$

$$(d \in \mathbb{N} : \text{أي}) \quad d = 1 \quad \text{بما أن} \quad a \wedge bc = 1$$

$$(ab + bc + ca) \wedge b = 1 \quad \text{بالمثل بين أن:}$$

$$(ab + bc + ca) \wedge c = 1$$

$$(ab + bc + ca) \wedge abc = 1 \quad \text{وبالتالي:}$$

47 تعتبر المتتالية العددية (من) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 2 & u_1 = 5 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} + 6u_n = 0 & ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} \wedge u_n = 1 \quad (1) \text{ بين أن:}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \wedge u_{n+2} \in \{1, 5\} \quad (2) \text{ سي أن:}$$

$$u_n \wedge u_{n+2} \quad \text{حدد حسب قيم } n \text{ العدد} \quad (3)$$

الجواب : (2) نضع : $d_n = u_{n+2} \wedge u_n$

فينا : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

ومنه : $u_{n+2} \wedge u_{n+1} = u_{n+1} \wedge u_n$ (مبدأ القويين رقم 4)

لأن : $\forall n \in \mathbb{N} : d_{n+1} = d_n$

أي : (d_n) متتالية ثابتة ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} : d_n = d_0 = u_0 \wedge u_1$

وبما أن : $\forall n \in \mathbb{N} : d_n = 1$ فإن : $u_0 \wedge u_1 = 5 \wedge 1 = 1$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} \wedge u_n = 1$

(4) فينا : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = -6u_n + 5u_{n+1}$

ومنه : $u_{n+2} \wedge u_n = u_n \wedge 5u_{n+1}$

نضع : $d = u_{n+2} \wedge u_n = u_n \wedge 5u_{n+1}$

فينا : $\begin{cases} d \mid u_n \\ d \mid 5u_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 5u_n \\ d \mid 5u_{n+1} \end{cases}$

لأن : $d \mid 5(u_n \wedge u_{n+1})$

وبما أن : $u_n \wedge u_{n+1} = 1$ فإن : $d \mid 5$ أي : $d \in \{1, 5\}$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} \wedge u_n \in \{1, 5\}$

(ملاحظة : يمكن حل هذا التقريب باستخدام العد العام للمتتالية (u_n))

($u_n = 2^n + 3^n$)

(3) لنحدد قيم التي من أجلها يكون لدينا : $u_{n+2} \wedge u_n = 5$

فينا : $u_{n+2} \wedge u_n = 5 \Rightarrow 5 \mid u_{n+2} \quad 5 \mid u_n$

$\Rightarrow 5 \mid 2^{n+2} + 3^{n+2} \quad 5 \mid 2^n + 3^n$

لدينا باستخدام المرافقة : 2 و 3 لا يقبلان 5 : $(k \in \mathbb{N})$

$3^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$ ، $2^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$

$3^{4k+1} \equiv 3 \pmod{5}$ ، $2^{4k+1} \equiv 2 \pmod{5}$

$3^{4k+2} \equiv 4 \pmod{5}$ ، $2^{4k+2} \equiv 4 \pmod{5}$

$3^{4k+3} \equiv 2 \pmod{5}$ ، $2^{4k+3} \equiv 3 \pmod{5}$

ومنه : $u_{n+2} \wedge u_n = 5 \Leftrightarrow n \in \{4k+1; 4k+3 \mid k \in \mathbb{N}\}$

$$4n+2 \wedge 4n=1 \Leftrightarrow n \in \{4k, 4k+2 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$4n+2 \wedge 4n=1 \Leftrightarrow n \text{ زوجي} \quad \text{ملاحظة:}$$

$$4n+2 \wedge 4n=5 \Leftrightarrow n \text{ فردي}$$

48 ليكن m, n من \mathbb{N}^* بحيث: $m \leq n$

$$m \wedge n = 1 \Rightarrow n \mid C_n^m \quad (1) \text{ بين أن:}$$

$$n+1 \mid C_{2n}^n \quad (2) \text{ بين أن:}$$

الجواب: (1) لدينا:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{n}{m} \cdot \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = \frac{n}{m} \times C_{n-1}^{m-1}$$

$$m \times C_n^m = n \times C_{n-1}^{m-1} \quad \text{إذن:}$$

$$n \mid m \times C_n^m \quad \text{إذن:}$$

وبما أن $m \wedge n = 1$ فإنه حسب مبرهنة كوشلوسا: $n \mid C_n^m$

(2) لدينا لكل n من \mathbb{N}^* : $(n+1) \times C_{2n}^{n+1} = n \times C_{2n}^n$

$$n+1 \mid n \times C_{2n}^n \quad \text{إذن:}$$

وبما أن $(n+1) \wedge n = 1$ فإنه حسب مبرهنة كوشلوسا: $(n+1) \mid C_{2n}^n$

49 ليكن a و b و c أعداداً من \mathbb{N}^* بحيث:

$$\begin{cases} ab = c^2 \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$$

بين أن: $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \cdot a = \alpha^2 \text{ و } b = \beta^2$

الجواب: نضع: $d = a \wedge c$

ومنه: $\exists (d, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : a = d\alpha \text{ و } c = dp \text{ و } d \wedge p = 1$

إذن: $ab = c^2 \Leftrightarrow b d \alpha = d^2 p^2 \Leftrightarrow b \alpha = d p^2$

لدينا: $d \wedge p = 1 \Leftrightarrow d \wedge p^2 = 1$

وبما أن: $b \alpha = d p^2$ فإن: $\frac{p^2/b \alpha}{p^2 \wedge \alpha = 1} \Rightarrow p^2/b$

لنتبين أن: $b \mid p^2$

لدينا: $b \alpha = d p^2$ إذن: $b \mid d p^2$

لکې ټیټ اې $b \mid \beta^2$ پکې اې ټیټ اې $b \wedge d = 1$

$$\Delta = b \wedge d \quad \cdot \text{رفع}$$
$$\Delta | a \wedge b \quad \text{...} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta | b \\ \Delta | a \wedge d = a \end{array} \right. \quad \text{...} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta | b \\ \Delta | d \end{array} \right. \quad \text{لدينا :}$$

وبما أن $a \wedge b = 1$ فإن $\Delta \mid 1$ ، منه: $\Delta = 1$

$$\begin{cases} b \mid dp^2 \\ b \wedge d = 1 \end{cases} \Rightarrow b \mid p^2 \quad : \text{oui} \quad b \wedge d = 1 \quad : \text{oui}$$
$$(b \in \mathbb{N}^* : \text{u5}) \quad \begin{cases} b \mid p^2 \\ p^2 \mid b \end{cases} \Rightarrow |b| = p^2 = b \quad \text{u5}$$

$\alpha = d : \text{cm}, p^2 \alpha = d p^2 : \text{cm}^2, b \alpha = d p^2 : \text{cm}^2$: ولدينا :

وَبِمَا تُن : $a = \alpha d$ فَيَا : $a = \alpha^2$

$a \wedge b = 1$; $b = b^2$; $a = a^2$: وبالتالي :

50 ایک m ، b و N^k بحث: $m \geq 3$ ، a عدد فردی.
$$d = (z^a - 1) \wedge (z^b + 1) \quad \text{gdi}$$

۱۲. $2^{ab} \equiv 1 \pmod{a-1}$

$$2^{ab} \equiv -1 \quad [d] \quad -v$$

(2) استنتج أن : $d \in \{1, 2\}$

(3) بين أن $d = 1$.

الجواب : (2) -1 لجواب : $d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$ ، ثم :

$$\exists (a, b) \in \mathcal{A}^2 \times \mathcal{A}^2 : 2^a - 1 = a \cdot a \quad \& \quad 2^b + 1 = b \cdot b \quad \& \quad a \wedge b = 1$$
$$2^a b = (2^a)^b = (2d+1)^b \quad : \text{منه}$$

$(\alpha d + 1)^b \equiv 1 \pmod{d}$. و، $\alpha d + 1 \equiv 1 \pmod{d}$. وبینا:

وبالتالي : $2^{ab} \equiv 1 \pmod{a}$

$$2^{ab} = (2^b)^a = (2^{p-1})^a$$
$$(p d - 1)^a \equiv (-1)^a [d] \quad \text{و،} \quad d p - 1 \equiv -1 [d] \quad \text{لذا،}$$

وبما أن a عدد فردي فإن : $[a] \quad (pa-1)^a \equiv -1$

والتالي : $2^{ab} \equiv -1 \pmod{d}$

(2) لدينا : $2^{ab} \equiv 1 \pmod{d}$ و $2^{ab} \equiv -1 \pmod{d}$

إذن : $0 \leq 2 \pmod{d}$ ومنه : $d \mid 2$

وبالتالي : $d \in \{1, 2\}$

(3) لدينا : $2^b + 1$ و $2^a - 1$ عددين فرديين فإن d عدد فردي

وبما أن : $d \in \{1, 2\}$ فإن : $d = 1$

51 ليكن $n \in \mathbb{N}^+$

فعرّف $S(n)$ لمجموع القواسم الموجبة للعدد n

(1) بين أنه إذا كان n غير أولي فإن n يقبل قاسم a بحيث : $a \geq \sqrt{n}$

(2) استنتج أن :
أ- إذا كان n غير أولي فإن : $S(n) > n + \sqrt{n}$

ب- إذا كان n أولي فإن : $S(n) < n + \sqrt{n}$

الجواب : (1) لدينا n عدد غير أولي إذن : $n = ab$: $\exists (a, b) \in \mathbb{N}^2$

بحيث : $a < a < n$ و $1 < b < n$ و $a \geq b$

بما أن : $a \geq b$ فإن : $a^2 \geq ab$ أي : $a^2 \geq n$

ومنه : $a \geq \sqrt{n}$

(2) إذا كان n غير أولي فإن : 1 و a و n قواسم موجبة للعدد n

ومختلفة فتشكّل متتالية : $S(n) \geq 1 + a + n$

وبما أن : $a \geq \sqrt{n}$ (بحسب السؤال 1) فإن : $1 + a + n > \sqrt{n} + n$

ومنه : $S(n) > n + \sqrt{n}$

و إذا كان n أولي فإن القواسم الموجبة للعدد n هي : 1 و n

ومنه : $S(n) = 1 + n < n + \sqrt{n}$ (لأن : $1 < \sqrt{n}$)

52 (مبرهنة Fermat) ليكن p عدداً أولياً موجباً

(1) بين أن : $\forall k \in \{1, \dots, p-1\} : p \mid C_p^k$

(2) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)^p \equiv n^p + 1 \pmod{p}$

(3) أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : n^p \equiv n \pmod{p}$

ب- استنتج أن : $[p] : n^{p-1} \equiv 1$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث : $n \not\equiv 0 \pmod{p}$

$$2^{349} \equiv 2 \pmod{7}$$

(٦) تطبيق : أ - يجب أن

ب - يجب أن العدد $A = 2^{30} + 3^{30}$ يقبل القسمة على 13

الجواب : (١) ليكن k من $\{1, \dots, p-1\}$ لدينا $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$

$$p! = k!(p-k)! C_p^k$$

$$p \mid k!(p-k)! C_p^k \quad \text{لدينا} \quad p \mid p! \quad \text{لذا} \quad p \mid C_p^k$$

ملاحظة : إذا كان p عدد أولي $p \nmid p$ فلا يقسم p فليكن $p \nmid p = 1$

لدينا لكل k من $\{1, \dots, p-1\}$: $p \nmid k = 1$; $p \nmid p-k = 1$

$$p \nmid k! = 1 \quad \text{و} \quad p \nmid (p-k)! = 1$$

$$p \nmid k!(p-k)! = 1 \quad \text{و} \quad p \mid k!(p-k)! C_p^k$$

فإنه حسب مبرهنة كوش : $p \mid C_p^k$

$$(n+1)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k n^k \quad \text{لدينا} \quad (2)$$

$$(n+1)^p = n^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k + 1$$

لدينا لكل k من $\{1, \dots, p-1\}$: $p \mid C_p^k$ أي $C_p^k \equiv 0 \pmod{p}$

$$\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{لذا} \quad (3)$$

$$(n+1)^p \equiv n^p + 1 \pmod{p} \quad \text{ومن}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^p \equiv n \pmod{p} \quad (3) \text{ لنثبت بالترجع أن}$$

- من أجل $n=0$ لدينا : $0^p \equiv 0 \pmod{p}$ (صحيحة)

- نفترض أن $n^p \equiv n \pmod{p}$ و نبين أن $(n+1)^p \equiv n+1 \pmod{p}$

لدينا حسب السؤال (١) : $(n+1)^p \equiv n+1 \pmod{p}$ و $n^p \equiv n \pmod{p}$

$$(n+1)^p \equiv n+1 \pmod{p} \quad \text{ومن}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^p \equiv n \pmod{p} \quad \text{وبالتالي}$$

ملاحظة : الغالبية تنقي مبرهنة في 2 أي : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad n^p \equiv n \pmod{p}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : n^p \equiv n \pmod{p} \quad \text{ب- لدينا}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : n(n^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{اذن}$$

ومن : $p \mid n(n^{p-1} - 1)$ و $p \nmid n$ لأن حسب مبرهنة كوش :

$$n^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{أي} \quad p \mid n^{p-1} - 1$$

وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N}^* : n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ مع $np \equiv 1$

(4) أ- بمأذن: 7 عدد أولي و $7 \nmid 2$ فإن: $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$

$$2^{349} = (2^6)^{58} \times 2$$

$$(2^6 \equiv 1 \pmod{7}) \text{ لأن } 2^{349} \equiv 2 \pmod{7} \quad \text{إذن:}$$

$$A = 2^{70} + 3^{70} \quad \text{ب- لدينا:}$$

لدينا: 13 عدد أولي و $13 \nmid 2$ و $13 \nmid 3$

$$2^{12} \equiv 1 \pmod{13} \quad 3^{12} \equiv 1 \pmod{13} \quad \text{إذن:}$$

$$A = (2^{12})^5 \times 2^{10} + (3^{12})^5 \times 3^{10}$$

$$A \equiv 2^{10} + 3^{10} \pmod{13}$$

$$(2^5 \equiv 6 \pmod{13}) \text{ لأن } 2^{10} = (2^5)^2 \equiv 6^2 \pmod{13} \quad \text{لدينا:}$$

$$(6^2 \equiv 10 \pmod{13}) \quad 2^{10} \equiv 10 \pmod{13}$$

$$(3^5 \equiv -9 \pmod{13}) \text{ لأن } 3^{10} = (3^5)^2 \equiv (-9)^2 \pmod{13} \quad \text{ولذا،}$$

$$((-9)^2 \equiv 3 \pmod{13}) \quad 3^{10} \equiv 3 \pmod{13}$$

$$A \equiv 0 \pmod{13} \quad \text{أو } A \equiv 10 + 3 \pmod{13} \quad \text{وهـ،}$$

وبالتالي $A = 2^{70} + 3^{70}$ يقبل القسمة على 13.

تطبيقات مبرهنة Fermat

53

ليكن n من \mathbb{Z} و p عدد أولي موجب فرد.

$$(1) \text{ يثبت أن: } n^p \equiv n \pmod{p}$$

$$(2) \text{ استنتج أن: } (n+1)^p - (n^p+1) \equiv 0 \pmod{p}$$

الاجواب: (1) ليكن n من \mathbb{Z} وإذن n و n^p لهما نفس الزوجية

$$\text{وهـ: } n^p \equiv n \pmod{p} \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{Z}$$

$$(2) \text{ ليوضح حسب السؤال (1) لكل } n \text{ من } \mathbb{Z} : n^p \equiv n \pmod{p}$$

$$\text{إذن: } (n+1)^p \equiv n+1 \pmod{p} \quad \text{وهـ: } (n+1)^p - (n^p+1) \equiv 0 \pmod{p}$$

$$(n+1)^p \equiv n+1 \pmod{p} \quad \text{وحسب مبرهنة Fermat:}$$

$$\text{إذن: } (n+1)^p - (n^p+1) \equiv 0 \pmod{p}$$

بما أن : $2 \nmid p-1 \Rightarrow 2 \mid (n+1)^p - (n^p+1) \Rightarrow 4 \mid (n+1)^p - (n^p+1)$
 (لأن p عدد فردي) فإن : $2p \mid (n+1)^p - (n^p+1)$
 وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad (n+1)^p - (n^p+1) \equiv 0 \pmod{2p}$

54 لنكن a, b, c و d أعداد \mathbb{N}^*
 حيث أن : $30 \mid \begin{vmatrix} 4b+d & 4c+d \\ a & a \end{vmatrix}$

الجواب : لدينا : $30 = 2 \times 3 \times 5$
 * إذا كان $5 \nmid a$ لا يقسم a فإن : $5 \nmid a \Rightarrow 5 \nmid a^4$ (لأن 5 عدد أولي)
 ومنه حسب مبرهنة Fermat : $a^4 \equiv 1 \pmod{5}$
 إذن : $a^{4b+d} \equiv a^d \pmod{5}$ و $a^{4c+d} \equiv a^d \pmod{5}$
 ومنه : $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0 \pmod{5}$
 * وإذا كان $5 \mid a$ يقسم a فإن : $a^{5b+d} \equiv 0 \pmod{5}$ و $a^{5c+d} \equiv 0 \pmod{5}$
 ومنه : $a^{5b+d} - a^{5c+d} \equiv 0 \pmod{5}$
 إذن لكل $a \in \mathbb{N}^*$: $5 \mid a^{5b+d} - a^{5c+d}$
 بالمثل نبين أن : $3 \mid a^{5b+d} - a^{5c+d}$ و $2 \mid a^{5b+d} - a^{5c+d}$
 وبما أن : $2, 3$ و 5 أعداد أولية فيما بينها فهي
 فإن : $2 \times 3 \times 5 \mid a^{5b+d} - a^{5c+d}$
 أي : $30 \mid a^{5b+d} - a^{5c+d}$

55 ليكن $n \in \mathbb{Z}$: نضع : $\mu_n = 5n^7 + 7n^5 + 23n$
 (1) بين أن : $\mu_n \equiv 0 \pmod{5}$
 (2) بين أن : $\mu_n \equiv 0 \pmod{7}$
 (3) استنتج أن : $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$

الجواب : (1) لدينا : 5 عدد أولي حسب مبرهنة Fermat : $n^5 \equiv n \pmod{5}$
 ولدينا : $5n^7 \equiv 0 \pmod{5}$ و $7n^5 \equiv 2n \pmod{5}$ و $23n \equiv 3n \pmod{5}$
 ومنه : $\mu_n \equiv 0 \pmod{5}$ أي : $\mu_n \equiv 5n \pmod{5}$

(2) لدينا : 7 عدد أولي ، ومنه : $n^7 \equiv n \pmod{7}$
 ولذا ، $5n^7 \equiv 5n \pmod{7}$ ؛ $7n^5 \equiv 0 \pmod{7}$ ؛ و $23n \equiv 2n \pmod{7}$ ،
 إذن ، $u_n \equiv 7n \pmod{7}$ أي : $u_n \equiv 0 \pmod{7}$
 (3) لدينا :
$$\begin{cases} u_n \equiv 0 \pmod{5} \\ u_n \equiv 0 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \mid u_n \\ 7 \mid u_n \end{cases}$$

 بمأثور : $35 \mid u_n$ فإن $5 \cdot 7 = 35$
 ومنه ، $\frac{u_n}{35} \in \mathbb{Z}$ أي $\frac{5n^7 + 7n^5 + 23n}{35} \in \mathbb{Z}$
 وبالتالي : $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$

56 يسأل كل من \mathbb{Z} لدا $42 \mid n^7 - n$

الجواب : لدا 2 عدد أولي حسب مبرهنة Fermat
 $n^2 \equiv n \pmod{2}$ ، ومنه $n^7 \equiv n^6 \pmod{2}$
 ولذا ، $n^6 \equiv n^3 \pmod{2}$ ، ومنه $n^3 \equiv n^2 \pmod{2}$
 إذن ، $n^3 \equiv n \pmod{2}$ ، ومنه $n^7 \equiv n \pmod{2}$
 وبالتالي : $2 \mid n^7 - n$
 لدا 3 عدد أولي ، إذن : $n^3 \equiv n \pmod{3}$ ، ومنه : $n^7 \equiv n^5 \pmod{3}$
 إذن ، $n^5 \equiv n \pmod{3}$ ، ومنه : $3 \mid n^7 - n$
 لدا 7 عدد أولي ، إذن : $n^7 \equiv n \pmod{7}$ ، ومنه : $7 \mid n^7 - n$
 بمأثور 2 و 3 ، 7 أعداد أولية فيما بينها ، فهي فإن ،
 $42 \mid n^7 - n$
 وبالتالي : $42 \mid n^7 - n$ كل من \mathbb{Z} .

57 ليكن p عدد أولي موجب و n من \mathbb{N}^* بحيث : $n \wedge p = 1$

(1) ببساطة إذا كان p فردي فإن : $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ أو $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$
 (2) ببساطة : $n^{p(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^2}$

الجواب :

(1) لو سا p عدد فردي و $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$: لأن

بما أن p عدد أولي و $p \wedge n = 1$ فإننا حسب مبرهنة Fermat

$$n^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$$

$$n^{\frac{p-1}{2}} - 1 = \left(n^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 - 1^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$= \left(n^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(n^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$$

$$p \mid \left(n^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(n^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \quad \text{فإن : } p \mid n^{\frac{p-1}{2}} - 1 \quad \text{بما أن :}$$

$$p \mid \frac{p+1}{n^2} + 1 \quad \text{أو} \quad p \mid \frac{p-1}{n^2} - 1 \quad \text{بما أن } p \text{ عدد أولي فإن}$$

$$\frac{p-1}{n^2} \equiv -1 \quad [p] \quad \text{أو} \quad \frac{p-1}{n^2} \equiv 1 \quad [p] \quad \text{وهنا :}$$

(2) لدينا : $n^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ ، مع p عدد λ من \mathbb{N} بحيث $n = 1 + \lambda p$: إذن :

$$\frac{p(p-1)}{n} = (1 + \lambda p)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k (\lambda p)^k$$

$$\frac{p(p-1)}{n} = 1 + C_p^1 \lambda p + \sum_{k=2}^p C_p^k \lambda^k p^k$$

$$\text{سأنا : } \sum_{k=2}^p C_p^k \lambda^k p^k \equiv 0 \quad [p^2] \quad \text{لأن : } (2 \leq k \leq p, \quad p^k \equiv 0 \quad [p^2])$$

$$\frac{p(p-1)}{n} \equiv 1 \quad [p^2] \quad \text{فإن : } C_p^1 \lambda p = \lambda p^2 \equiv 0 \quad [p^2] \quad \text{و}$$

أي p عدد أولي موجب و a, b من \mathbb{Z} حسب

$$a^p \equiv b^p \quad [p]$$

$$a^p \equiv b^p \quad [p^2] \quad \text{يبقى}$$

58

الجواب : بما أن p عدد أولي فإننا حسب مبرهنة Fermat :

$$b^p \equiv b \quad [p] \quad \text{و} \quad a^p \equiv a \quad [p]$$

$$a^p - b^p \equiv a - b \quad [p] \quad \text{إذن}$$

$$(a^p \equiv b^p \quad [p]) \quad \text{لأن : } a - b \equiv 0 \quad [p] \quad \text{أي}$$

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad a = b + kp \quad \text{وهنا}$$

$$a^p = (b + kp)^p = \sum_{i=0}^p C_p^i b^{p-i} (kp)^i \quad \text{إذن}$$

$$a^p = b^p + C_p^1 b^{p-1} \lambda p + \sum_{i=2}^p C_p^i b^{p-i} (\lambda p)^i$$

$$a^p - b^p = b^{p-1} \lambda p^2 + \sum_{i=2}^p C_p^i b^{p-i} (\lambda p)^i$$

بما أن $b^{p-1} \lambda p^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$ و $C_p b^{p-1} (\lambda p) \equiv 0 \pmod{p^2}$ لكل $\lambda \in \mathbb{F}_p$ فإن $a^p - b^p \equiv 0 \pmod{p^2}$.

59 ليكن p و q عددين أوليين مختلفين.
 حيث أن: $[pq] \quad p^{q-1} + q^{p-1} \equiv -1$

الحواب: بما أن p و q عددين أوليين مختلفين فإن: $p \nmid q$ و $q \nmid p$

حسب مبرهنة Fermat: $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{p}$ و $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{q}$

لدينا: $p-1 \geq 1$ و $q-1 \geq 1$

إذن: $p^{q-1} \equiv 0 \pmod{p}$ و $q^{p-1} \equiv 0 \pmod{q}$

اذن: $\begin{cases} p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q} \\ q^{p-1} \equiv 0 \pmod{q} \end{cases} \Rightarrow p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{q}$

$\begin{cases} q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \\ p^{q-1} \equiv 0 \pmod{p} \end{cases} \Rightarrow q^{p-1} + p^{q-1} \equiv 1 \pmod{p}$

ومنه: $p \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ و $q \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$

وبما أن: $p \nmid q$ و $q \nmid p$ فإن: $p \nmid q$ و $q \nmid p$

وبالتالي: $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$

60 ليكن p عدد أولي موجب و a من \mathbb{N}^* بحيث $p \nmid a$

نضع: $F_p(a) = \frac{a^{p-1} - 1}{p}$

(1) نتحقق من أن: $F_p(a) \in \mathbb{N}$

(2) ليكن b من \mathbb{N}^* بحيث $b \nmid p$

يبين أن: $F_p(ab) \equiv F_p(a) + F_p(b) \pmod{p}$

الحواب: (1) بما أن p عدد أولي و $p \nmid a$ فإن حَسَب مبرهنة

Fermat: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ أي: $p \mid a^{p-1} - 1$

ومنه: $\frac{a^{p-1} - 1}{p} \in \mathbb{N}$ أي: $F_p(a) \in \mathbb{N}$

(2) لدينا حَسَب مبرهنة Fermat:

$$\begin{cases} a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \\ b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \end{cases} \Rightarrow (a^{p-1} - 1)(b^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p^2}$$

$$(ab)^{p-1} - a^{p-1} - b^{p-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p^2} \quad \text{منه:}$$

$$(ab)^{p-1} - 1 \equiv (a^{p-1} - 1) + (b^{p-1} - 1) \pmod{p^2}$$

$$\frac{(ab)^{p-1} - 1}{p} \equiv \frac{a^{p-1} - 1}{p} + \frac{b^{p-1} - 1}{p} \pmod{p} \quad \text{منه:}$$

$$F_p(ab) \equiv F_p(a) + F_p(b) \pmod{p} \quad \text{وبالتالي:}$$

61 نعتبر في \mathbb{Z}^4 المعادلة: (E) $x^4 + 781 = 3y^4$

لتك 5 مجموعة حلول المعادلة (E)

(1) بين أن: $x^4 \equiv 1 \pmod{5}$ أو $x^4 \equiv 0 \pmod{5}$ $\forall x \in \mathbb{Z}$

(2) بين أن: $x^4 + 781 \equiv 1 \pmod{5}$ أو $x^4 + 781 \equiv 2 \pmod{5}$ $\forall x \in \mathbb{Z}$

(3) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

الجواب: (1) لدينا 5 عدد أولي.

• إذا كان 5 يقسم x فإن: $x^4 \equiv 0 \pmod{5}$

• إذا كان 5 لا يقسم x فإن: $x^4 \equiv 1 \pmod{5}$

حسب مبرهنة Fermat $x^4 \equiv 1 \pmod{5}$

(2) لدينا: $x^4 \equiv 1 \pmod{5}$ و $781 \equiv 1 \pmod{5}$ ، بما أن: $x^4 \equiv 0 \pmod{5}$ أو $x^4 \equiv 1 \pmod{5}$

فإن: $x^4 + 781 \equiv 1 \pmod{5}$ أو $x^4 + 781 \equiv 2 \pmod{5}$

(3) لدينا: $y^4 \equiv 0 \pmod{5}$ أو $y^4 \equiv 1 \pmod{5}$

ومنه: $3y^4 \equiv 0 \pmod{5}$ أو $3y^4 \equiv 3 \pmod{5}$

لأن: $x^4 + 781 \equiv 1 \pmod{5}$ أو $x^4 + 781 \equiv 2 \pmod{5}$

$\begin{cases} x^4 + 781 \equiv 1 \pmod{5} \text{ أو } x^4 + 781 \equiv 2 \pmod{5} \\ 3y^4 \equiv 0 \pmod{5} \text{ أو } 3y^4 \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$

ومنه: $x^4 + 781 \neq 3y^4$ لكل x, y من \mathbb{Z}

وبالتالي: $S = \emptyset$

62 ليكن n من $N^+ \setminus \{1\}$ ، a, b من N^+ حيث : $a \neq b$

(1) بين أن : $\left(\frac{a^n - b^n}{a - b}\right) \wedge (a - b) = (na^{n-1}) \wedge (a - b)$

(2) بين أن : $\left(\frac{a^n - b^n}{a - b}\right) \wedge (a - b) = (n(a \wedge b)^{n-1}) \wedge (a - b)$

الجواب : (1) لدينا : $\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

وبما أن : $a \equiv b \pmod{a-b}$ فإن : $a^{n-1-k} \equiv b^{n-1-k} \pmod{a-b}$

ومنه : $\frac{a^n - b^n}{a - b} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-1-k} \pmod{a-b}$

$\equiv \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} \pmod{a-b}$

$\equiv na^{n-1} \pmod{a-b}$

منه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث : $\frac{a^n - b^n}{a - b} = na^{n-1} + k(a - b)$

(ونعلم حسب القسمة رقم k : $xa + y = y + xa$: $xy = yx$)

ومنه : $\left(\frac{a^n - b^n}{a - b}\right) \wedge (a - b) = (a - b) \wedge na^{n-1}$

(2) نضع : $d = a \wedge b$

$d_1 = na^{n-1} \wedge (a - b)$; $d_2 = n(a \wedge b)^{n-1} \wedge (a - b)$

$d_1 = na^{n-1} \wedge (a - b)$; $d_2 = nd^{n-1} \wedge (a - b)$;

لدينا : $d_1 \mid a - b$; $d_2 \mid na^{n-1}$

وبما أن : $a \mid a$; $d \mid a$; $a^{n-1} \mid a^{n-1}$; $d^{n-1} \mid a^{n-1}$

وبما أن : $d_2 \mid na^{n-1}$; $d_2 \mid nd^{n-1}$

ومنه : $d_1 \mid d_2$; أي : $d_1 \mid na^{n-1} \wedge (a - b)$

لدينا : $d_2 \mid na^{n-1}$; $d_2 \mid a - b$

ومنه : $na^{n-1} \equiv 0 \pmod{d_2}$; $a \equiv b \pmod{d_2}$

وبما أن : $d = a \wedge b$; فإن : $\exists (q, p) \in \mathbb{Z}^2$: $d = qa + pb$

$d \equiv qa + pb \pmod{d_2}$;

$d \equiv qa + pa \pmod{d_2}$;

$d \equiv (q+p)a \pmod{d_2}$;

$nd^{n-1} \equiv n(d+p)^{n-1} \cdot d^{n-1} \pmod{d_2}$ ، ومنه ،
 $nd^{n-1} \equiv 0 \pmod{d_2}$: فإذن $nd^{n-1} \equiv 0 \pmod{d_2}$: وبما أن ،
 $d_2 \mid a-b$ ، $d_2 \mid nd^{n-1}$: إذن ،
 $d_2 \mid n(ab)^{n-1} \wedge (a-b)$: أي $d_2 \mid nd^{n-1} \wedge (a-b)$ ، ومنه ،
 $d_2 \mid d_1$ وبالتالي :
 بما أن ، $d_2 \mid d_1$ و $d_1 \mid d_2$:
 فإن $d_1 = d_2$:

وبالتالي : $\left(\frac{a^n - b^n}{a-b} \right) \wedge (a-b) = n(ab)^{n-1} \wedge (a-b)$

63

حل في $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $\begin{cases} x+y=1008 \\ x \wedge y=24 \end{cases}$

الجواب : نعم $d = x \wedge y$ ، ومنه ،

$\exists (a, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^1$ $x = da$ ، $y = dp$ ، $a \wedge p = 1$

إذاً النظم متكافئ : $\begin{cases} d(a+p) = 1008 \\ d = 24 \\ a \wedge p = 1 \end{cases}$: أي $\begin{cases} a+p=42 \\ a \wedge p=1 \\ d=24 \end{cases}$

لنضع المظاهر الممكنة لـ a, p في الجدول التالي :

a	1	5	11	13	17	19
p	41	37	31	29	25	23
x	24	120	264	312	408	456
y	984	888	744	696	600	552

ملاحظة :
 إذا كانت $(x, y) \in S$
 فإن $(y, x) \in S$:

ومنه مجموعة حلول النظم (ك) هي :

$S = \{ (24, 984) , (984, 24) ; (120, 888) , (888, 120) , (264, 744) ,$
 $(744, 264) , (312, 696) ; (696, 312) ; (408, 600) ; (600, 408) ,$
 $(456, 552) ; (552, 456) \}$

حل في \mathbb{N}^2 النظام التالي :
 (5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 19476 \\ xy = 1260 \end{cases}$

الجواب : نضع : $d = xy$ ، ومنه :

$$\exists (d, p) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 : x = dp \text{ و } y = dp \text{ و } d \wedge p = 1$$

$$\begin{cases} d^2(x^2 + p^2) = 19476 \\ \frac{d^2 \wedge p}{d} = 1260 \\ d \wedge p = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{اذن النظام (5) تكافئ :} \\ \text{(لأن : } xy = \frac{1260}{d} \end{array}$$

$$\begin{cases} d^2(x^2 + p^2) = 19476 \\ d \wedge p = 1260 \\ d \wedge p = 1 \end{cases} \quad \text{ومنه :}$$

$$\begin{array}{l} d^2 \mid 19476 \quad \text{بما أن : } d^2(x^2 + p^2) = 19476 \text{ فإن :} \\ d^2 \in \{1; 2^2; 3^2; 6^2\} \quad \text{وبما أن : } 19476 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 541 \text{ فإن :} \\ d \in \{1; 2; 3; 6\} \quad \text{وبما أن : } d \in \mathbb{N}^2 \text{ فإن :} \end{array}$$

$$\begin{cases} x^2 + p^2 = \frac{19476}{d^2} \\ d \wedge p = 1260 \\ d \wedge p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+p)^2 - 2dp = \frac{19476}{d^2} \\ d \wedge p = 1260 \\ d \wedge p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+p)^2 = \frac{19476}{d^2} + \frac{2520}{d} \\ d \wedge p = 1260 \\ d \wedge p = 1 \end{cases}$$

نبحث الحالات الممكنة في الجدول التالي :

$d=1$	$d=2$	$d=3$	$d=6$
x لا توجد	x لا توجد	x لا توجد	$x=10$
p لا توجد	p لا توجد	p لا توجد	$p=21$
x لا توجد	x لا توجد	x لا توجد	$x=60$
y لا توجد	y لا توجد	y لا توجد	$y=126$

ملاحظة : إذا كان

$$(x, y) \in S$$

فإن :

$$(x, y) \in S$$

وبالتالي مجموعة حلول النظام (5) هي :

$$S = \{(60; 126); (126; 60)\}$$

(5) حل في النظم $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} xy - x \wedge y = 77 \\ 0 < x < y \end{cases}$

الجواب : نضع : $d = x \wedge y$ ، فإن :

$\exists (d, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : x = dd \text{ و } y = dp \text{ و } d \wedge p = d$

إذاً النظم (5) تكافئ :

$$\begin{cases} \frac{d^2 p}{d} - d = 77 \\ 0 < d < p \\ d \wedge p = d \end{cases} \quad \begin{cases} d(p-1) = 77 \\ 0 < d < p \\ d \wedge p = d \end{cases}$$

أي :

بما أن : $d \mid 77$ فإن : $d \in \{1, 7, 11, 77\}$

نلخص الحالات الممكنة في الجدول التالي :

	$d=1$				$d=7$		$d=11$		$d=77$
النظم (5)	$xp-1=77$ $0 < d < p$ $d \wedge p = d$				$xp-1=21$ $0 < d < p$ $d \wedge p = d$		$xp-1=7$ $0 < d < p$ $d \wedge p = d$		$xp-1=1$ $0 < d < p$ $d \wedge p = d$
d	1	1	3	6	1	3	1	1	2
p	78	39	26	13	12	4	8	8	2
x	1	2	3	6	7	21	11	11	77
y	78	39	26	13	84	28	88	88	144

ومنه مجموعة حلول النظم (5) هي :

$S = \{ (1, 78) ; (2, 39) ; (3, 26) ; (6, 13) ; (7, 84) ; (21, 28) ; (11, 88) ; (77, 244) \}$

(أ) بين أن كل n من \mathbb{Z} : $(2n+1) \wedge (9n+4) = 1$

(ب) ليكن n من \mathbb{Z} نضع : $d_n = (2n-1) \wedge (9n+4)$

حدد حسب قيم n قيمة d_n .

الجواب : (1) لدينا كل n من \mathbb{Z} : $9(2n+1) - 2(9n+4) = 1$

ومنه حسب مبرهنة Bezout : $(2n+1) \wedge (9n+4) = 1$

(2) باستعمال القسمة الاقليدية لـ $9n+4$ على $2n-1$ نحصل على :

$$9n+4 = 4(2n-1) + (n+8)$$

$$2n-1 = 2(n+8) - 17 \quad \text{ولمّا كذلك :}$$

$$d_n = (9n+4) \wedge (2n-1) \quad \text{منه :}$$

$$d_n = (2n-1) \wedge (n+8)$$

$$d_n = (n+8) \wedge 17$$

$$d_n = 17 \quad \text{فإن :} \quad n \equiv 9 \pmod{17} \quad \text{إذا كان :}$$

$$\text{الحالة 2 : إذا كان :} \quad n \not\equiv 9 \pmod{17} \quad \text{و} \quad 17 \text{ عدد أولي}$$

$$\text{فإن :} \quad 17 \nmid n+8 \quad \text{يتقسم} \quad n+8 \quad \text{منه :} \quad (n+8) \wedge 17 = 1$$

$$d_n = 1 \quad \text{أي :}$$

67

حل في \mathbb{N}^3 من النمطة التالية :

$$(s) \begin{cases} a \wedge b = 12 \\ b \wedge c = 18 \\ a+b+c = 102 \end{cases}$$

$$\text{الجواب : بمان :} \quad a \wedge b = 12 \quad \text{و} \quad b \wedge c = 18$$

$$\text{فإن :} \quad a \wedge b \wedge c = (a \wedge b) \wedge (b \wedge c) = 12 \wedge 18 = 6$$

$$\text{لذا :} \quad 3(a', b', c') \in \mathbb{N}^3 : \quad a = 6a' ; b = 6b' ; c = 6c' ; a \wedge b \wedge c = 1$$

وإن النمطة (s) تكافئ :

$$\begin{cases} a' \wedge b' = 2 \\ b' \wedge c' = 3 \\ a' + b' + c' = 17 \\ (a', b', c') \in \mathbb{N}^3 \end{cases} \quad \text{ومنه :} \quad \begin{cases} b' \in \{6, 12\} \\ \begin{cases} a' = 1 \\ 3 \mid b' \end{cases} \\ 6 \mid b' \end{cases}$$

لتعطي الحالات الممكنة في الجدول التالي :

b'	a'	c'	b	a	c
12	2	3	72	12	18
6	3	8	36	18	48
	2	9		12	54

وبالتالي مجموعة حلول النمطة (s) هي :

$$S = \{ (12, 72, 18) ; (18, 36, 48) ; (12, 36, 54) \}$$

68 نغير $x, y \in \mathbb{N}$ المعادلة : $x^3 - y^3 = 999$

وليكن K مجموعة حلولها .

(1) ليكن (x, y) عنصراً من K .

أ- بين أن : $x > y > 1$.

ب- بس أن $x \geq y + 3$.

(2) استنتج أن : $y \leq 10$.

(3) حدد x إذا كان : $y = 1$.

(4) نفترض أن : $y \neq 1$.

أ- بين أن : $x \geq 11$ و $y \geq 7 \Rightarrow (x, y) \in K$

ب- استنتج مجموعة حلول المعادلة المعطاة .

الجواب : (1) أ- ليكن (x, y) من K إذن : $x^3 - y^3 = 999 > 0$

ومنه : $x^3 > y^3$ أي : $x > y$ (بأن $x, y > 0$)

وبما أن : $y \in \mathbb{N}$ فإن : $y \geq 1$

وبالتالي : $x > y > 1$.

ب- لدينا 3 عدداً أولياً ، ومنه حسب مبرهنة Fermat :

$$x^3 \equiv x \pmod{3} \quad y^3 \equiv y \pmod{3}$$

$$x - y \equiv x^3 - y^3 \pmod{3}$$

$$(x^3 - y^3 = 999) \quad x - y \equiv 999 \pmod{3} \quad \text{أي}$$

$$x - y \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{إذن}$$

$$(x > y) \quad x - y = 3a \quad a \geq 1 \quad \text{ومنه :}$$

$$(3a \geq 3) \quad x - y \geq 3 \quad \text{(د) :}$$

$$x \geq y + 3 \quad \text{وبالتالي :}$$

$$999 = x^3 - y^3 \quad \text{(2) ليكن } (x, y) \text{ من } K \text{ ، لدينا :}$$

$$999 \geq (y+3)^3 - y^3 \quad \text{وبما أن : } x \geq y + 3 \text{ فإن :}$$

$$999 \geq 9y^2 + 27y + 27 > 9y^2 \quad \text{أي :}$$

$$111 > y^2 \quad \text{إذاً :}$$

$$y \in \mathbb{N} \quad \text{فإن : } y \leq 10 \quad \text{وبما أن :}$$

(3) لنحدد k إذا كان $y=1$
 $(x, 1) \in S \Leftrightarrow x^3 - 1 = 999$ لدينا:

$$\Leftrightarrow x^3 = 1000 \Leftrightarrow x = 10$$

ومنه: $(10, 1) \in S$

(4) إذا كان $y \neq 1$ فإن: $y \geq 2$

أ- ليكن (x, y) من S لدينا:

$$x^3 = 999 + y^3$$

$$\text{وبما أن: } y^3 \geq 8 \text{ فإن: } x^3 \geq 999 + 8$$

$$x^3 \geq 1007$$

$$\text{ومنه: } x \geq 11 \text{ ولدينا: } y^3 = x^3 - 999$$

$$y^3 \geq 11^3 - 999 = 332$$

$$\text{ومنه: } y \geq 7$$

ب- لدينا إذا كان (x, y) من S و $y \neq 1$ فإن: $x \geq 1$ و $y \geq 7$

بأخذ: $y=7$ لا يوجد حد لـ x .

بأخذ: $y=8$ لا يوجد حد لـ x .

بأخذ: $y=9$ يوجد حد لـ x .

بأخذ: $y=10$ لا يوجد حد لـ x .

وبما أن $(10, 1) \in S$ فإن مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي:

$$S = \{(10, 1); (12, 9)\}$$

ليكن p عدد أولي، $p \geq 5$ ، وليكن $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

69

$$ab^p - ba^p \equiv 0 \pmod{p}$$

(1) بين أن:

$$ab^p - ba^p \equiv 0 \pmod{p}$$

(2) استنتج أن:

الجواب: (1) إذا كان $a \equiv 0 \pmod{p}$ فإن: $ab^p \equiv 0 \pmod{p}$ و $ba^p \equiv 0 \pmod{p}$

$$ab^p - ba^p \equiv 0 \pmod{p} \text{ ومنه:}$$

إذا كان $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ فإن: $a^p \equiv a \pmod{p}$ و $ab^p \equiv b \pmod{p}$

$$ab^p - ba^p \equiv b - a \pmod{p} \text{ ومنه:}$$

$$b - a \equiv 0 \pmod{p} \text{ وبما أن: } b - a = b(b^{p-1} - 1) = b(b-1)(b^{p-2} + b^{p-3} + \dots + b + 1)$$

$$b - a \equiv 0 \pmod{p} \text{ فإن: } 2 \mid (b-1) \text{ ومنه:}$$

ومن (2) $ab^p - ba^p \equiv 0 \pmod{p}$ ، وبالتالي، $2 \mid a$ لكل $a, b \in \mathbb{Z}^*$

* إذا كان: $a \equiv 0 \pmod{3}$ فإن: $ab^p \equiv 0 \pmod{3}$ و $a^p b \equiv 0 \pmod{3}$

ومنه: $ab^p - a^p b \equiv 0 \pmod{3}$

* إذا كان: $a \equiv 1 \pmod{3}$ فإن: $ab^p - a^p b \equiv b^p - b \pmod{3}$

$b \equiv$	0	1	-1	[3]
$b^p \equiv$	0	1	-1	[3]
$b^p - b \equiv$	0	0	0	[3]

من خلال الجدول

نستنتج أن: $b^p - b \equiv 0 \pmod{3}$

وبالتالي: $ab^p - a^p b \equiv 0 \pmod{3}$

* إذا كان: $a \equiv -1 \pmod{3}$ فإن: $ab^p - a^p b \equiv -b^p + b \pmod{3}$

ومنه: $ab^p - a^p b \equiv 0 \pmod{3}$

وبالتالي $ab^p - a^p b \equiv 0 \pmod{3}$ لكل a, b من \mathbb{Z}^*

$$6 \mid ab^p - a^p b \quad \text{فإن:} \quad \begin{cases} 3 \mid ab^p - a^p b \\ 2 \mid ab^p - a^p b \\ 2 \wedge 3 = 6 \end{cases}$$

وبالتالي: $ab^p - a^p b \equiv 0 \pmod{6}$

(2) حسب مبرهنة Fermat لدينا: $a^p \equiv a \pmod{p}$ و $b^p \equiv b \pmod{p}$

ومنه: $ab^p - a^p b \equiv ab - a^p b \pmod{p}$

أي: $ab^p - a^p b \equiv 0 \pmod{p}$

اذن: $p \mid ab^p - a^p b$

$$6p \mid ab^p - a^p b \quad \text{فإن:} \quad \begin{cases} p \mid ab^p - a^p b \\ 6 \mid ab^p - a^p b \\ p \wedge 6 = 6p \end{cases} \quad \text{بما أن}$$

وبالتالي لكل a, b من \mathbb{Z}^* : $ab^p - a^p b \equiv 0 \pmod{6p}$

(1) ليكن p من \mathbb{N} حيث $p \geq 2$ و $(p-2)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ بين أن : p عدد أولي .

(2) ليكن p عدداً أولياً من \mathbb{N} . $\mathbb{Z}_p = \{1, 2, \dots, p-1\}$

- أ- بين أن : $\forall x \in \mathbb{Z}_p \exists ! z \in \mathbb{Z}_p : xz \equiv 1 \pmod{p}$
 ب- حل في \mathbb{Z}_p المعادلة : $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$
 ج- استنتج أن : $(p-2)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

الجواب : (1) لدينا p من \mathbb{N} و $p \geq 2$

بما أن : $(p-2)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ فإن : $\exists k \in \mathbb{Z} : (p-2)! + 1 = kp$

أي : $\exists k \in \mathbb{Z} : kp - (p-2)! = 1$

ومن حسب مبرهنة Bezout : $p \wedge (p-2)! = 1$

إذن : $p \wedge 2 = 1$ ، $p \wedge 3 = 1$ ، $p \wedge 4 = 1$ ، ... ، $p \wedge (p-2) = 1$

لكل x من $\{1, 2, \dots, p-1\}$: x لا يقسم p ، ومنه p عدد أولي .

(2) أ- ليكن p عدد أولي و $p \geq 2$ ، ليكن x من \mathbb{Z}_p

بإذن : $x < p$

بما أن p أولي فإن : $p \wedge x = 1$ ، ومن حسب مبرهنة Bezout

$\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2 : ax + bp = 1$

أي : $ax \equiv 1 \pmod{p}$

القسمة "القليدية" لـ a على p تعطي :

$\exists ! (q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a = qp + r$ و $0 \leq r \leq p-1$

$(qp + r)x \equiv 1 \pmod{p}$ ومنه

$qx + rx \equiv 1 \pmod{p}$ أي :

وبالتالي : $rx \equiv 1 \pmod{p}$ و $r \in \mathbb{Z}_p$

ب- لنحل في \mathbb{Z}_p المعادلة : $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$:

أيضا : $x^2 \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0 \pmod{p}$

$\Leftrightarrow p \mid (x-1)(x+1)$

$\Leftrightarrow p \mid (x-1)$ أو $p \mid (x+1)$ (p أولي)

$$\begin{aligned}
 x^2 \equiv 1 \pmod{p} &\Leftrightarrow x-1 \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{أو} \quad x+1 \equiv 0 \pmod{p} \\
 &\Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{أو} \quad x \equiv -1 \pmod{p} \\
 &\Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{أو} \quad x \equiv p-1 \pmod{p}
 \end{aligned}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي: $S = \{1, p-1\}$

ج- بما أن هناك عنصران فقط يقبلان كمتكاملات لبعضهما: 1 و $p-1$

$$\forall x \in \{2, \dots, p-2\} : \exists! n \neq x : x \cdot n \equiv 1 \pmod{p}$$

$$2 \times 3 \times \dots \times (p-2) \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{وبالتالي:}$$

$$(2 \times 3 \times \dots \times (p-2)) (p-2) \equiv (p-1) \pmod{p} \quad \text{فإن:}$$

$$(p-2)! \equiv p-2 \pmod{p} \quad \text{ومنه:}$$

$$(p-2)! + 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{وبالتالي:}$$

خلاصة مبرنة Wilson:

$$p \text{ أولي} \Leftrightarrow (p-2)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

تطبيقات مبرنة WILSON

71

(1) ليكن n عدد $n \geq 5$

بين أن مستلزام التالي $(n! - 1)$ غير أولي $\Rightarrow (n-2)$ أولي

(2) ليكن n عدداً من n و n زوجي بحيث: $p = 2n+1$ أولي.

$$\text{بين أن: } (n!)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

(3) ليكن p عدداً أولي فردياً.

$$\text{بين أن: } 2((p-3)!) + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

الاجواب: (1) لدينا: $n+2$ أولي ومنه حسب مبرنة Wilson

$$(n+2)! + 1 \equiv 0 \pmod{n+2}$$

$$(n+2)! \equiv -1 \pmod{n+2} \quad \text{أي:}$$

$$(n+2)! + 1 = (n+2)n! + 1 \quad \text{ولدينا:}$$

$$= (n+2)n! - n! + n! + 1$$

$$= (n+2)n! - n! + 1$$

وبما أن : $(n+2)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ فإن : $(n+2)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$
أي : $(n+2)! \equiv -1 \pmod{p}$ (لأن : $(n+2)! \not\equiv 0 \pmod{p}$)

ومنه : $n+2 \mid n! - 1$

وبما أن : $n! - 1 \in \{1, 2, \dots, n+2\}$ فإن $n! - 1$ غير أولي .

(2) لدينا : $p = 2n+1$ أولي ، إذن حسب مبرنة Wilson لدينا :

$$(2n)! \equiv -1 \pmod{p} \quad \text{أي :} \quad (p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ولدينا : $(2n)! = (1 \times 2 \times \dots \times n)(n+1) \times \dots \times (2n)$

$$n+1 \equiv 2n+1-n \pmod{p} \quad \text{وبما أن :}$$

$$n+1 \equiv -n \pmod{p}$$

$$n+2 \equiv -n+1 \pmod{p}$$

\vdots

$$2n \equiv -1 \pmod{p}$$

$$(n+1)(n+2) \dots (2n) \equiv (-n)(-n+1) \dots (-1) \pmod{p}$$

$$\begin{aligned} &\equiv (-1)^n (n(n-1) \dots 1) \pmod{p} \\ &\equiv (-1)^n n! \pmod{p} \end{aligned}$$

$$(n+1)(n+2) \dots (2n) \equiv n! \pmod{p} \quad \text{وبما أن : } n \text{ زوجي فإن :}$$

$$(2n)! \equiv (n!)(n!) \pmod{p} \quad \text{ومنه :}$$

$$(2n)! + 1 \equiv (n!)^2 + 1 \pmod{p} \quad \text{وبالتالي :}$$

$$(n!)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{وبما أن :} \quad (2n)! + 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{فإن :}$$

$$A \equiv 2((p-3)!) \pmod{p} \quad (3) \text{ نضع :}$$

$$(p-1)(p-2)A \equiv 2(p-1)(p-2)(p-3)! \pmod{p}$$

$$\equiv 2(p-1)!$$

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \quad \text{بما أن : } p \text{ عدد أولي فإن حسب مبرنة Wilson :}$$

$$(p-1)(p-2)A \equiv -2 \pmod{p} \quad \text{ومنه :}$$

$$p-2 \equiv -2 \pmod{p} \quad \text{وبما أن :} \quad p-1 \equiv -1 \pmod{p}$$

$$(p-1)(p-2) \equiv 2 \pmod{p} \quad \text{فإن :}$$

$$2(A+1) \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{ومنه :} \quad 2A \equiv 2 \pmod{p} \quad \text{لأن :}$$

وبما أن p أولي و p فردي فإن $p \nmid 2$ يقسم 2 ومنه : $2 \nmid p = 1$

لأنه : $2 \nmid p = 2$ $\bar{p} \mid 2(n+2)$ $p \mid n+2$ ومنه :

$$n+2 \equiv 0 \pmod{p}$$

وبالتالي : $2((p-3)!) + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

ليكن p عدد أولي و n من \mathbb{Z} .

72

$$u_n = n^p + (p-1)! \cdot n \quad \text{نضع :}$$

$$(1) \text{ نثبت أن : } u_n \equiv 0 \pmod{p}$$

$$(2) \text{ يسأل : } 1999 \mid (2000)^{1999} + 2000(1998!)$$

الجواب : (1) لدينا p أولي فإن حسب مبرهنة Fermat :

$$n^p \equiv n \pmod{p}$$

وحسب مبرهنة Wilson : $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

$$\text{ومنه : } n^p \equiv n \pmod{p} \quad \bar{p} \mid n(p-1)! \equiv n \pmod{p}$$

$$\text{وبالتالي : } u_n \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{أو} \quad n^p + n(p-1)! \equiv 0 \pmod{p}$$

$$(2) \text{ نثبت أن : } 1999 \mid (2000)^{1999} + 2000(1998!)$$

نثبت أولاً أن : 1999 عدد أولي .

$$\text{لدينا : } [\sqrt{1999}] = 44$$

بما أن جميع الأعداد الأولية التي تنتمي إلى $[1, 44]$ لا تقسم 1999

وهربعها أصغر من 1999 فإن : 1999 عدد أولي .

$$\text{ومنه حسب السؤال (1) نأخذ : } p=1999 \quad \bar{n}=2000$$

$$\text{نستنتج أن : } (2000)^{1999} + 2000(1998!) \equiv 0 \pmod{1999}$$

$$\text{وبالتالي : } 1999 \mid (2000)^{1999} + 2000(1998!)$$

حل في $N \times N$ أنظمة التالية :

73

$$(5) \quad \begin{cases} x \wedge y = 18 \\ x \vee y = 540 \end{cases}$$

الجواب : نضع : $x \wedge y = d$ نعلم أن : $(x \wedge y)(x \vee y) = |xy|$

ومنه : $3(d, p) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ : x = dd \text{ و } y = pd \text{ و } d \wedge p = 1$
 وذن النتيجة (S) تكون :

$$\begin{cases} d = 18 \\ d \wedge p = 1 \\ d \wedge p = 1 \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} d = 18 \\ d \wedge p = 30 \\ d \wedge p = 1 \end{cases}$$

بما أن : $d \wedge 30$ فإن : $d \in \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$
 بما أن : $d \wedge p = 1$ فإن القيم الممكنة لـ d و p هي :

$$d = 2 \Leftrightarrow p = 15$$

$$d = 3 \Leftrightarrow p = 30$$

$$d = 5 \Leftrightarrow p = 6$$

$$d = 3 \Leftrightarrow p = 10$$

وبما أن d و p يعبران أذوار مماثلة فإن مجموعة النتيجة (S) هي :

$$S = \{(18; 540), (36; 270), (54; 180), (90; 108), (540; 18), (270; 36), (180; 54), (108; 90)\}.$$

ليكن n من \mathbb{N} نضع :

74

(1) لنك a, b, c, d أعداداً من \mathbb{N} بحيث : $a \wedge b = 1$ و $c \wedge d = 1$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a = c \text{ و } b = d$$

(2) استنتج أن : $a \wedge b = 1$ (ناقش حسب زوجية n)

الجواب : (1) لدينا : $a \wedge b = 1$ و $c \wedge d = 1$ و $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

اذن : $ad = bc$ ومنه : $a \mid bc$

وبما أن : $a \wedge b = 1$ فإنه حسب توكيد : $a \mid c$

وبما أن : $c \mid ad$ و $c \wedge d = 1$ فإن : $c \mid a$

اذن : $\begin{cases} a \mid c \\ c \mid a \\ a > 0 \text{ و } c > 0 \end{cases}$ ومنه : $a = c$

وبما أن : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ و $a = c$ فإن : $b = d$

وبالتالي : $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ a \wedge b = 1 \text{ و } c \wedge d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

(2) نفترض أن $a, q \in \mathbb{Q}$ أي: $a = \frac{p}{q}$ و $p \wedge q = 1$

لأن: $a = \frac{p}{q} \Leftrightarrow a^2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} = \frac{n}{n+1}$

لذا كان: $n = 2d$ زوجي فإن: $\begin{cases} p^2 \wedge q^2 = 1 \\ d \wedge (d+1) = 1 \end{cases} \quad \frac{p^2}{q^2} = \frac{d}{d+1}$

فحسب السؤال (1) نستنتج أن: $p^2 = d$ و $q^2 = d+1$

ومنه: $q^2 - p^2 = 1$ أي: $(q-p)(q+p) = 1$

لأن: $\begin{cases} p+q=1 \\ q-p=1 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} p=0 \\ q=1 \end{cases}$ تناقض مع كون $p \wedge q = 1$

لذا كان: $n = 2d+1$ فردي فإن: $\frac{p^2}{q^2} = \frac{2d+1}{2d+3}$

لدينا: $(2d+3) \wedge (2d+1) = (2d+1) \wedge 2 = 1$

لأن 2 عدد أولي ولا يقسم $2d+1$.
وبما أن: $p^2 \wedge q^2 = 1$ فإن: $\begin{cases} p^2 = 2d+1 \\ q^2 = 2d+3 \end{cases}$

ومنه: $q^2 - p^2 = 2$ أي: $(q-p)(q+p) = 2$

بما أن $p+q > q-p$ فإن: $\begin{cases} p+q=2 \\ q-p=1 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} q=\frac{3}{2} \\ p=\frac{1}{2} \end{cases}$ لا يتناسب مع كون $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

ومنه الافتراض خاطئ، وبالتالي $a \notin \mathbb{Q}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

75 الهدف من هذا التمرين هو البرهنة الخلف على أن كل a و b

من \mathbb{N}^* حيث: $a > b$ لدينا: $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \notin \mathbb{N}$

نفترض أن يوجد n من \mathbb{N} بحيث: $n = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ ونضع: $d = a \wedge b$

(1) بين أنه: $\exists (u, p) \in \mathbb{N}^2 : a^2 + b^2 = n(a^2 - b^2) \quad \text{و} \quad a \wedge b = 1$

(2) بين أنه: $\exists k \in \mathbb{N}^* : k(a^2 - b^2) = 2$

(3) بين أن: $a^2 - b^2 \geq 3$

(4) استنتج أن: $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \notin \mathbb{N}$

الجواب: (1) لدينا: $d = a \wedge b$ ، منه

$\exists (d, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : a = d \cdot d \quad \text{و} \quad b = d \cdot p \quad \text{و} \quad a \wedge b = 1$

$$n = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{d^2 a^2 + d^2 p^2}{d^2 a^2 - d^2 p^2} = \frac{a^2 + p^2}{a^2 - p^2} \quad \text{نلاحظ}$$

$$n(a^2 - p^2) = a^2 + p^2 \quad \text{ومن هنا:}$$

$$(a > b) \Leftrightarrow a > p \quad \text{ملاحظة:}$$

$$n(a^2 - p^2) = a^2 + p^2 \quad \text{(2) حسب السؤال (1) لدينا:}$$

$$(4) \quad a^2(n-2) = p^2(n+2) \quad \text{ومن هنا:}$$

$$a \wedge p = 2 \Leftrightarrow a^2 \wedge p^2 = 2 \quad \text{لدينا:}$$

$$\text{بما أن: } p^2 \mid a^2(n-2) \quad ; \quad a^2 \wedge p^2 = 1 \quad \text{فإن حسب جبرمة } \frac{a^2}{p^2} \text{ هو:}$$

$$\exists k \in \mathbb{N}^+ : n-2 = k p^2 \quad \text{ومن هنا: } p^2 \mid n-2$$

$$\text{ومن (1) نستنتج أن: } p^2(n+2) = a^2 b p^2 \quad \text{أي } n+2 = k a^2$$

$$\text{لذلك لدينا: } n-2 = k p^2 \quad ; \quad n+2 = k a^2$$

$$k a^2 - k p^2 = 2 \quad \text{ومن هنا:}$$

$$k(a^2 - p^2) = 2 \quad \text{أي:}$$

$$a > b \Leftrightarrow a > p \quad \text{(5) لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow a \geq p+1 \quad \text{(لأن } a, p \in \mathbb{N}^+)$$

$$\Leftrightarrow a^2 \geq (p+1)^2 = p^2 + 2p + 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 - p^2 \geq 2p + 1$$

$$\text{وبما أن: } p \in \mathbb{N}^+ \quad \text{فإن } p \geq 1 \quad \text{منه: } 2p+1 \geq 3$$

$$a^2 - p^2 \geq 3 \quad \text{وبالتالي:}$$

$$(4) \text{ بافتراضنا أن: } n = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \quad \text{فإننا نحصل على ما يلي:}$$

$$\text{نوجد } k \text{ من } \mathbb{N}^+ \text{ بحيث: } k(a^2 - p^2) = 2 \quad ; \quad k(a^2 - p^2) \geq 3 \quad ; \quad a \wedge p = 1$$

$$2 \geq 3k \quad \text{ومن هنا: } k(a^2 - p^2) \geq 3k$$

$$\text{أي: } k \leq \frac{2}{3} \quad \text{فإننا نقدر مع كون } k \geq 1$$

لذلك: الافتراض خاطئ.

$$\text{وبالتالي لا يوجد } a, b \text{ من } \mathbb{N}^+ \text{ بحيث: } \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \in \mathbb{N} \quad \text{و } a > b$$

لنك a, b, A, B أعداداً صحيحة طبيعية بحيث:

$$B = 19a + 5b \quad \text{و} \quad A = 11a + 2b$$

1. أ. احسب: $7A + B$ بدلالة a و b .

ب. استنتج أنه إذا كان أحد العددين A و B يقبل القسمة على 19 فإن الآخر يقبل القسمة على 19.

2. بين أنه إذا كان العددا a و b أوليين فيما بينهما فإن القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B لا يمكن أن يكون إلا 1 أو 19.

الجواب: 1. أ. لدينا: $B = 19a + 5b$ و $A = 11a + 2b$

$$\text{لذا: } 7A + B = 7(11a + 2b) + 19a + 5b = 95a + 19b$$

$$\text{ب. لدينا: } 7A + B = 19(5a + b)$$

« نفترض أن: $19 | A$

$$\text{بما أن: } B = 19(5a + b) - 7A \quad \text{و} \quad 19 | A \quad \text{و} \quad 19 | 19(5a + b)$$

$$\text{فإن: } 19 | B$$

« نفترض أن: $19 | B$

$$\text{بما أن: } A = 19(5a + b) - 7B \quad \text{و} \quad 19 | B \quad \text{و} \quad 19 | 19(5a + b)$$

$$\text{فإن: } 19 | 7A$$

$$\text{وبما أن: } 19 \nmid 7 \quad \text{فإن: } 19 | A$$

2. نفترض أن: $a \wedge b = d$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} A = 11a + 2b \\ B = 19a + 5b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19a = 5A - 2B \\ 19b = 11B - 19A \end{cases}$$

$$\text{نضع: } d = A \wedge B$$

$$\text{بما أن: } d | A \quad \text{و} \quad d | B \quad \text{فإن: } d | 19a \quad \text{و} \quad d | 19b$$

$$\text{منه: } d | (19a) \wedge (19b) \quad \text{أ. ب.} \quad d | 19(a \wedge b)$$

$$\text{وبما أن: } a \wedge b = d \quad \text{فإن: } d | 19$$

$$\text{وبما أن: } 19 \text{ عدد أولي و } d \in \mathbb{N}^+ \quad \text{فإن: } d = 1 \quad \text{أو} \quad d = 19$$

$$\text{أي: } a \wedge b = 1 \quad \text{أو} \quad a \wedge b = 19$$

(1) $36x - 25y = 5$ معادلة \mathbb{Z}^2 نعبر

77

(2) يجب أن x مضاعف للعدد 5، إذا كان (x, y) حلاً للمعادلة (1)

(3) حدد حلاً خاصاً للمعادلة (1)، ثم حل للمعادلة (2)

(3) ليكن (x, y) حلاً للمعادلة (1) و $d = \text{gcd}(36, 25)$

٩. حدد القيم الممكنة للعدد d

ب. حدد العلول (x, y) للمعادلة (1) حيث: $x \wedge y = 1$

الجواب : (1) تكون مجموعة حلول المعادلة (1)

لدينا : $(x, y) \in S \iff 36x - 25y = 5$

$\iff 36x = 5(1 + 5y)$

$\Rightarrow 5 \mid 36x$

بما أن $5 \nmid 36$ ، فإن $5 \mid x$ حسب جبرية Gauss : $5 \mid x$

أي : $x = 5x'$ ، ومنه : $x = 5x'$ (2)

(2) لنحدد حلاً خاصاً للمعادلة (1) :

$36x - 25y = 5 \iff x = 5x' \text{ و } 36x' - 5y = 1$

نلاحظ أن : $(2, 7)$ حلاً للمعادلة : $36x' - 5y = 1$

ومنه : $(5, 7)$ حلاً خاصاً للمعادلة (1)

لدينا : $(x, y) \in S \iff 36x - 25y = 5$

$36 \cdot 5 - 25 \cdot 7 = 5$

إذاً : $36(x-5) = 25(y-7)$

بما أن : $36 \mid 25(y-7)$ و $36 \nmid 25$ ، فإن $36 \mid y-7$

أي : $36k \in \mathbb{Z} : y-7 = 36k$

$36k \in \mathbb{Z} : y = 7 + 36k$

أي : $x-5 = 25k$ أي : $x = 5 + 25k$

كذلك : الزوج : $(5 + 25k, 7 + 36k)$ حل للمعادلة (1) لكل $k \in \mathbb{Z}$

وبالتالي حلول المعادلة (1) هي :

$S = \{ (5 + 25k, 7 + 36k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$

(3) أليكن (x, y) حل \leq لنجد : $d = x \wedge y$

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow x = 5 + 25k \quad ; \quad y = 7 + 36k \quad | \quad k \in \mathbb{Z}$$

لدينا : $d | 36x - 25y = 5$: $d | 36x$ و $d | 25y$ ،

ومنه : $d = 5$ أو $d = 1$.

ب - يكون $d = 5$ إذا كان : $y = 36k + 7$ مضاعف للعدد 5

$$\text{أي : } 36k + 7 \equiv 0 \pmod{5} \text{ أي : } k + 2 \equiv 0 \pmod{5}$$

ومنه : $k \equiv 3 \pmod{5}$

يكون $d = 1$ إذا كان : $k = 5k' + 2$ أو $k = 5k' + 7$

$$\text{أو } k = 5k' + 4 \text{ أو } k = 5k' \quad (k' \in \mathbb{Z})$$

ومنه : $(x, y) \in S$ و $x \wedge y = 1$ إذا وفقط إذا كان :

$$(x, y) \in \left\{ (25(5k'+2)+5; 36(5k'+2)+7); (25(5k'+7)+5; 36(5k'+7)+7); (25(5k'+4)+5; 36(5k'+4)+7); (25 \cdot 5k'+5; 36 \cdot 5k'+7) \mid k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

حل في \mathbb{Z}^2 المعادلات التالية :

78

$$12x - 15y = 8 \quad (1)$$

$$24x - 20y = 12 \quad (2)$$

$$143x - 100 = 1 \quad (3)$$

الجواب : * لنحل المعادلات (1) و (2) : $12x - 15y = 8$

لدينا : $12 \wedge 15 = 3$ و ليكن (x, y) حل للمعادلة (1)

إذاً : $3 | 12x - 15y$ ومنه : $3 | 8$ وهذا مستحيل .

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S_1 = \emptyset$

* لنحل المعادلة (2) : $24x - 20y = 12$

لدينا : $24 \wedge 20 = 4$ و $4 | 12$

إذاً المعادلة (2) تكافئ : المعادلة : $6x - 5y = 3$

لدينا : (3,3) حلٌّ بديهيًّا للمعادلة (2)

$$(2) \Leftrightarrow 6x - 5y = 3 \quad \text{و} \quad 6 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 3$$

$$\Leftrightarrow 6(x-3) - 5(y-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(x-3) = 5(y-3)$$

بما أن : $6 \mid 5(y-3)$ و $6 \wedge 5 = 1$ فإنه حسب مبرهنة Gauss

$$3k \in \mathbb{Z} : y-3 = 6k \quad \text{أي} : 6 \mid y-3$$

$$(k \in \mathbb{Z}) : y = 3 + 6k \quad \text{ومنه} :$$

$$x-3 = 5k \quad \text{أي} : 6(x-3) = 5 \cdot 6k \quad \text{أي} : x-3 = 5k$$

$$x = 3 + 5k \quad \text{ومنه} :$$

عكسياً لكل $k \in \mathbb{Z}$ (3+5k, 3+6k) حلٌّ للمعادلة (2)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (2) هي :

$$S_2 = \{ (3+5k, 3+6k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

لحل المعادلة (3) $143x - 100y = 1$

نلاحظ : $143 \wedge 100 = 1$ إذ أن المعادلة (3) تملك حلولاً في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

لتحدد إذ أن حلًّا بديهيًّا لهذه المعادلة :

$$a = 100 \quad \text{و} \quad b = 143 \quad \text{نضع} :$$

$$b = a + 43 \quad \text{لدينا} :$$

$$a = 2 \cdot 43 + 14$$

$$43 = 3 \cdot 14 + 1$$

سنحاول أن نكتب العدد 1 بدلالة a و b

$$b - a = 43 \quad \text{لدينا} :$$

$$14 = a - 2 \cdot 43 = a - 2(b-a)$$

$$14 = 3a - 2b$$

$$1 = 43 - 3 \cdot 14 \quad \text{لدينا} :$$

$$1 = (b-a) - 3(3a-2b)$$

$$1 = 7b - 10a$$

ومنه : (7,10) حل بديهيًّا للمعادلة (3)

لدينا : $143x - 100y = 1$ و $143 \cdot 7 - 100 \cdot 10 = 1$ (3) \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow 143(x-7) = 100(y-10)$

بما أن $143 \mid y-10$: فإن $143 \mid 100 = 1$; $143 \mid 100(y-10)$ بـ

$\exists k \in \mathbb{Z} : y-10 = 143k$: إذًا

$y = 10 + 143k$: أي

$x-7 = 100k$: أي $143 \cdot (x-7) = 100 \cdot 143k$ ولدينا

$x = 7 + 100k$ ومنه

عكسًا لكل $k \in \mathbb{Z}$: $(7+100k, 10+143k)$ حل للمعادلة (3)

والتالي حلول المعادلة (3) هي : $S_3 = \{ (7+100k, 10+143k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$

79 ندرس \mathbb{Z} المعادلة (E) $17x - 5y = 3$

(1) بين أنه إذا كان (x, y) حلًا للمعادلة (E) فإن x مضاعف 3

(2) حل المعادلة (E)

(3) ليكن (x, y) حلًا للمعادلة (E) : سمح $d = \text{MCD}(x, y)$

أ- ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب- ماهي الحلول (x, y) بحيث يكون لدينا $d \neq 1$ ؟

الجواب : (1) ليكن S مجموعة المعادلة (E)

لدينا : $(x, y) \in S \Leftrightarrow 17x - 5y = 3$

$\Leftrightarrow 17x = 3(5y+1)$

ومنه : $\begin{cases} 3 \mid 17x \\ 17 \mid 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3 \mid x$

إذن : x مضاعف لـ 3 .

(2) نضع : $x = 3x' \quad (x' \in \mathbb{Z})$

المعادلة (E) تكافئ : $17x' - 5y = 1$ (E')

لدينا : $(-2, -7)$ حلًا بدعيًا للمعادلة (E')

لدينا : $17x' - 5y = 1 \quad \Leftrightarrow 17 \cdot (-2) - 5 \cdot (-7) = 1$

$$27(x'+2) = 5(y+7)$$

ومنه :

$$\begin{cases} 27 \mid 5(y+7) \\ 27 \wedge 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow 27 \mid y+7$$

لدينا :

$$\exists k \in \mathbb{Z} : y+7 = 27k$$

إذاً :

$$y = -7 + 27k$$

$$27(x'+2) = 5 \cdot 27k$$

ومنه :

$$x'+2 = 5k$$

أي :

$$x' = -2 + 5k$$

$$(k \in \mathbb{Z}) \quad y = -7 + 27k \quad \text{و} \quad x = -6 + 25k$$

وبالتالي :

عكسًا كل k من \mathbb{Z} ، $(-6 + 25k, -7 + 27k)$ حل للمعادلة (E)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S = \{ (-6 + 25k, -7 + 27k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

(3) ليكن (x, y) من S ،

$$d \mid x \wedge y$$

$$d \mid x \quad \text{و} \quad d \mid y \Rightarrow d \mid 27x - 25y$$

لدينا :

$$\Rightarrow d \mid 3$$

$$(27x - 25y = 3) \quad (4)$$

$$d \in \{1, 3\}$$

ومنه :

$$x \wedge y \neq 1 \Leftrightarrow x \wedge y = 3$$

ب - لدينا :

$$\Leftrightarrow 3 \mid y$$

$$(3 \mid x) \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow 3 \mid -7 + 27k$$

$$\Leftrightarrow -7 + 27k \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Leftrightarrow 2 - k \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Leftrightarrow k \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\Leftrightarrow k = 2 + 3d \quad / \quad d \in \mathbb{Z}$$

$$d \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث} \quad y = 27 + 51d$$

$$\text{و} \quad x = 24 + 45d$$

ومنه :

كل عدد صحيح طبيعي $n > 1$ يكتب : $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$

حيث الأعداد p_i أولية ومختلفة والأعداد a_i أعداد صحيحة طبيعية غير معدومة.

(1) برهن على أن عدد القواسم الموجبة لـ n يساوي : $(1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_k)$

(2) برهن على أنه إذا كان عدد صحيح طبيعي n يقبل 9 قواسم موجبة فإن

n يكون على شكل : 8^a أو $2 \cdot 8^a$ حيث a و 2 عددين أوليان مختلفان.

(3) نريد أن نحدد الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي تخفف الشرطتين (1) و (2).

(1) n يقبل تسعة قواسم.

(2) $n = 39p + 1$ حيث p عدد أولي.

1- برهن على أن n لم يكن أن يكون على شكل 8^a حيث a عدد أولي.

ب- برهن على أن p يأخذ إحدى القيم 5 أو 37 أو 41.

ج- أوجد الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي تخفف الشرطين (1) و (2).

الجواب : (1) القواسم الموجبة لعدد $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ هي : $1, p_1, p_1^2, \dots, p_1^{a_1}, p_2, p_2^2, \dots, p_2^{a_2}, \dots, p_k, p_k^2, \dots, p_k^{a_k}$

ومنه عدد القواسم الموجبة للعدد n هو : $(1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_k)$

وبما أن : $n = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$ فإن حسب المبدأ الذي نأسي عدد القواسم

الموجبة للعدد n هو : $\prod_{i=1}^k (1+a_i)$ أي : $(1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_k)$

(2) لكن عدد القواسم الموجبة لـ n هو 9 و n يأخذ 3 قيم كما أنه على شكل

$(1+8)$ أو $(1+2)(1+2)$

وحسب السؤال (1) فإن n يكتب على شكل : 8^a أو $2 \cdot 8^a$

حيث a و 2 عددين أوليان مختلفان.

(3) بمأ أن n يقبل تسعة قواسم موجبة فإنه إما على شكل 8^a أو على

$2 \cdot 8^a$ حيث : a و 2 عددين أوليان مختلفان.

نفرض أن : $n = 8^a$.

وبما أن : $n = 39p + 1$ فإن : $8^a = 39p + 1$ (p عدد أولي)

ومنه : $8^a - 1 = 39p$ أي : $(8^a - 1) = 39p$ أي : $(8^a - 1) = 3 \times 13 \times p$

بما أن a عدد أولي فإن : $8^a - 1 = 8^1 - 1 = 7$ و $8^2 - 1 = 63$ و $8^3 - 1 = 511$ و $8^4 - 1 = 4095$

ومنه : $8^a - 1 = 39p$ أي : $a = 2$

لذا كان : $a = 2$ فإن : $(8^a - 1) = 63 = 3 \times 3 \times 7$ و $8^2 - 1 = 63 = 3 \times 3 \times 7$

غير ممكن لأن : $13p = 5 \times 27$ و p عدد أولي .
 وبالنسبة العدد n فيمكن أن يكون على شكل : a^2
 ب- بيان العدد n لا يمكن أن يكون على شكل : a^2 فإنه يكتب على شكل : $a^2 \cdot b^2$ حيث : a و b عددين أوليين مختلفان .

إذن : $a^2 \cdot b^2 = 39p + 1$ أي : $(ab-1)(ab+1) = 39p$

$(ab-1)(ab+1) = 3 \times 13 \times p$ (p أولي)

ومنه : $\begin{cases} ab-1=1 \\ ab+1=39p \end{cases}$ أو $\begin{cases} ab-1=39 \\ ab+1=p \end{cases}$ أو $\begin{cases} ab-1=p \\ ab+1=39 \end{cases}$

أو $\begin{cases} ab-1=3p \\ ab+1=13 \end{cases}$ أو $\begin{cases} ab-1=13 \\ ab+1=3p \end{cases}$ أو $\begin{cases} ab-1=3 \\ ab+1=13p \end{cases}$ أو $\begin{cases} ab-1=13p \\ ab+1=3 \end{cases}$

يكافئ : $\begin{cases} 13p=1 \\ ab=2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} p=42 \\ ab+1=p \end{cases}$ أو $\begin{cases} p=37 \\ ab+1=39 \end{cases}$ أو $\begin{cases} 3p=11 \\ ab+1=13 \end{cases}$ غير ممكن

أو $\begin{cases} p=5 \\ ab+1=3p \end{cases}$ أو $\begin{cases} 3p=5 \\ ab+1=13p \end{cases}$ أو $\begin{cases} 13p=1 \\ ab+1=3 \end{cases}$ غير ممكن

ومنه : $p=5$ أو $p=42$ أو $p=37$

ج- إذا كان $p=5$ فإن : $n_2 = 39 \times 5 + 1 = 196$ أي $n_2 = 2^2 \times 7^2$ فقط

إذا كان $p=37$ فإن : $n_2 = 39 \times 37 + 1 = 1444$ أي $n_2 = 2^2 \times 19^2$ فقط

إذا كان $p=42$ فإن : $n_3 = 39 \times 42 + 1 = 1600$ أي $n_3 = 2^6 \times 5^2$ لا يحقق

الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تعكف القسمة (1) و (2) هي : 196 ، 1444

2) نضع : $a = pn$; $b = p(n-1)$ حيث $p \in \mathbb{N}^*$ و $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

81

بين أن : $a \wedge b = a - b$

ج- بين أنه إذا كان عدد a ليعبر عن غير منعدمين a و b ، فيحقق :

$a \wedge b = a - b$ فإنه يوجد عددين طبيعيين p و n بحيث :

$a = pn$; $b = p(n-1)$

3) تطبيق : ليكن x و y عن \mathbb{N} ، نكتب :

$a = 40 \times (3y+2)$; $b = 15 \times (8y+5)$; $c = 24 \times (5y+3)$

أ- حدد : $a \wedge b$ و $b \wedge c$ و $a \wedge c$

ب- تعكف من أن الفاسم المشترك الأكبر للأعداد a و b و c هو x .

الجواب : (1) لدينا : $a = pn$ و $b = p(n-1)$ حيث : $p \in \mathbb{N}^*$ و $n \in \mathbb{N}^*$

نضع : $d = a \wedge b$ ، ولدينا : $a - b = pn - p(n-1) = p$

بما أن : $p \mid a$ و $p \mid b$ فإن : $p \mid a \wedge b$ أي : $p \mid d$

بما أن : $d \mid a$ و $d \mid b$ فإن : $d \mid a - b$ أي : $d \mid p$

بما أن : $p \mid d$ و $d \mid p$; $p > 0$ و $d > 0$ فإن : $d = p$

وبالتالي : $a \wedge b = a - b$

(2) ليكن a و b من \mathbb{N}^* حيث $a \wedge b = a - b$ ، إذن يوجد (n, p) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

، بحيث : $a = n(a - b)$ و $b = p(a - b)$ و $a \wedge b = 1$

إذن : $a - b = a(a - b) - p(a - b)$ أي : $(a - b)(a - p - 1) = 0$

وبما أن : $a - b \neq 0$ فإن : $a - p - 1 = 0$ أي : $p = a - 1$

لنضع : $a - b = p$ و $d = n$ ، ومنه نستنتج أن :

$$b = p(n-1) \quad \text{و} \quad a = np$$

(3) 1- ليكن x و y من \mathbb{N}^* لدينا :

$$c = 24x(5y+3) \quad \text{و} \quad b = 15x(8y+5) \quad \text{و} \quad a = 40x(3y+2)$$

$$\text{لدينا : } b = 5x(24+15) \quad \text{و} \quad a = 5x(24y+16)$$

$$\text{إذن : } b = p(n-1) \quad \text{و} \quad a = pn \quad \text{حيث : } p = 5x \quad \text{و} \quad n = 24y+16$$

$$\text{ومنه : } a \wedge b = a - b \quad \text{أي : } a \wedge b = 5x$$

$$\text{لدينا : } b = 3x(40y+25) \quad \text{و} \quad c = 3x(40y+24)$$

$$\text{إذن : } b = pn \quad \text{و} \quad c = p(n-1) \quad \text{حيث : } p = 3x \quad \text{و} \quad n = 40y+25$$

$$\text{ومنه : } b \wedge c = b - c \quad \text{أي : } b \wedge c = 3x$$

$$a \wedge b \wedge c = (a \wedge b) \wedge (b \wedge c) \quad \text{ب - لدينا :}$$

$$= 5x \wedge 3x$$

$$= x(5 \wedge 3)$$

$$\text{وبما أن : } 5 \wedge 3 = 1 \quad \text{فإن : } a \wedge b \wedge c = x$$

(1) ليكن x و y عددين صحيحان طبيعيان بحيث: $x \wedge y = 1$

بين أن: $x^a \wedge y^b = 1$ لكل a و b من \mathbb{N}^*

(2) ليكن $\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n}$ عدداً حقيقياً غير متعدهم بحيث لكل i يخالف b_i

$$b_i \wedge b_j = 1$$

أثبت وجود أعداد صحيحة نسبية a_1, a_2, \dots, a_n بحيث يكون:

$$\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$$

(يمكنك استعمال المبرهان بالتراجع على n : $n \geq 1$)

(3) ليكن a عدداً من \mathbb{Z}^* وليكن b عدداً خيراً أولياً من \mathbb{N}^* .

استنتج وجود أعداد صحيحة نسبية غير معدومة a_1, a_2, \dots, a_n

و b_1, b_2, \dots, b_n بحيث لكل i يخالف b_i و $b_i \wedge b_j = 1$

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$$

الاجواب: (1) لنبين أن: $x^a \wedge y^b = 1 \Rightarrow \forall (a, b) \in \mathbb{N}^2$ $x \wedge y = 1$

لبنس أدلة: $x^a \wedge y = 1$: $\forall a \in \mathbb{N}^*$ $x \wedge y = 1$

لدينا: $a \wedge b = 1$ و نفترض أن: $x^a \wedge y \neq 1$

ليكن d قاسم مشترك أولي لـ x^a و y ($x^a \wedge y \neq 1$)

بما أن: $d \mid x^a$ و $d \mid y$ له أولي فإن: $d \mid x$

اذن: $d \mid x$ و $d \mid y$ ومنه: $d \mid x \wedge y = 1$ و $d \in \mathbb{N}^*$

أي: $d = 1$ يناقض مع كون d عدداً أولياً إذن الافتراض خاطئ

وبالتالي: $\forall a \in \mathbb{N}^* : x^a \wedge y = 1$

نضع: $x = x^a$ و $y = y$

وبما أن: $y \wedge x = 1$ فإنه مما سلف: $\forall b \in \mathbb{N}^* : y^b \wedge x = 1$

أي: $\forall b \in \mathbb{N}^* : y^b \wedge x^a = 1$

وبالتالي: $x^a \wedge y^b = 1 \Rightarrow \forall (a, b) \in \mathbb{N}^2$ $x \wedge y = 1$

(2) لنبين بالتراجع: $\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$ $\forall (a, a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$

حيث: $b_i \wedge b_j = 1$ ($i \neq j$)

من أجل $n=2$ لدينا : $\frac{a}{b_1} = \frac{a_1}{b_1}$ ، و $a_1 = a$:

نفترض أنه $\exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$: $\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$

ليكن $\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1}}$ عدداً جديراً غير منعدم بحيث : $b_i \wedge b_j = 1$ $i \neq j$:

نضع : $B_1 = b_{n+1}$ ، $B_2 = b_1 b_2 \dots b_n$

بما أن : $b_{n+1} \wedge b_i = 1$ لكل i من $\{1, \dots, n\}$ فإن : $b_{n+1} \wedge (b_1 b_2 \dots b_n) = 1$

أي : $B_1 \wedge B_2 = 1$

لذا ، $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2$: $u B_1 + v B_2 = 1$

$$a u B_1 + a v B_2 = a$$

$$\frac{a}{B_1 B_2} = \frac{a u}{B_1} + \frac{a v}{B_2} \quad \text{و منه :}$$

$$= \frac{a u}{b_1 b_2 \dots b_n} + \frac{a v}{b_{n+1}}$$

وحسب الافتراض لدينا : $\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$

$$\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1}} = \frac{u a_1}{b_1} + \frac{v a_1}{b_2} + \dots + \frac{v a_n}{b_n} + \frac{u a}{b_{n+1}} \quad (\text{لذا})$$

$$= \frac{u a_1}{b_1} + \frac{v a_1}{b_2} + \dots + \frac{v a_n}{b_{n+1}} \quad (u_i \in \mathbb{Z})$$

وبالتالي لكل n من \mathbb{N}^* يوجد (a_1, a_2, \dots, a_n) من \mathbb{Z}^n بحيث :

$$\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$$

(3) ليكن (a, b) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ حيث b غير أولي .

إذا كان $b=2$ فإن : $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{2} = a$

إذا كان $b \neq 2$ فبممكن تفكيكه إلى جداء أعداد أولية :

أي توجد $p_2 > p_3 > \dots > p_n$ أعداد أولية موجبة ومختلفة من a مني

توجد a_2, a_3, \dots, a_n من \mathbb{N}^* بحيث : $b = p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_n^{a_n}$

نضع : $b_i = p_i^{a_i}$ لكل $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ لذا : $b_i \wedge b_j = 1$ $i \neq j$ (4)

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n}$$

لاذن لدينا :

وحسب السؤال (2) توجد a_1, a_2, \dots, a_n أعداد من \mathbb{Z}

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \quad \text{بحيث :}$$

83

ليكن x, y عددين صحيحين طبيعيين غير متعديين يحققان النظام:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 625 \\ xy = 120 \end{cases}$$

(1) بين أن أحد العددين x و y زوجي والآخر فردي .

(2) نفترض أن x زوجي .

$$\text{أ- بين أن : } (25-x) \wedge (25+x) = 1$$

ب- بين أنه يوجد عدداً صحيحاً طبيعياً m, n بحيث :

$$\begin{cases} x + 25 = m^2 \\ -x + 25 = n^2 \end{cases}$$

www.66ghz.com

(3) حدد العددين x و y .

(4) استنتج مما سبق حلول المعادلة : $x^2 + y^2 = 625$ ، $(x, y) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$.

الجواب : (1) نفترض أن x و y لهما نفس الزوجية (أول x و y

لهما نفس الزوجية) ومثل $x^2 + y^2 = 625$ عدد زوجي وهذا متناقض مع كون

625 عدد فردي .

وبالتالي : أحد العددين x و y زوجي والآخر فردي .

(2) نفترضه x زوجي لاذن y فردي .

$$\text{أ- لدينا : } y^2 = (25+x)(25-x) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (25)^2$$

$$\text{نضع : } d = (25-x) \wedge (25+x)$$

$$\begin{cases} d^2 | y^2 \\ d | 2x \end{cases} \quad \text{لاذن : } d | 25-x \quad \text{و} \quad d | 25+x \quad \text{و} \quad \text{مثلاً : } d | 2x$$

لاذن : $d | x$ و $d | y$ (لأن : $d | y$ و d فردي و $d \wedge 2 = 1$)

ومنه : $d \mid xy$ ، أي : $d \mid 2$ (لأن : $xy=2$)

لأن : $d=2$ وبالتالي : $(25-x) \wedge (25+x) = 1$

ب- نعلم أن كل عدد صحيح نسبي غير صدم ومضال 1 و 2- يمكن تفكيكه إلى جداء أعداد أولية. فلنا x عدد زوجي فلنا :

$$(25-x=1 \text{ : إذا كان : }) \quad (\text{ مع } d_i=0) \quad 25-x = \prod_{i=1}^k p_i^{d_i}$$

$$(25+x=1 \text{ : إذا كان : }) \quad (\text{ مع } d_i=0) \quad 25+x = \prod_{i=1}^k p_i^{d_i}$$

حيث كل p_i لدينا : p_i و p_i أعداد أولية مختلفة.

$$y^2 = \prod_{i=1}^k p_i^{d_i} \quad \text{ومنه :}$$

$$d_i \wedge p_j = 1 \quad \text{فلنا :} \quad (25-x) \wedge (25+x) = 1 \quad \text{بما أن}$$

ومنه لكل i من 1 إلى k : $d_i = 2p_i$: عدد زوجي أي :

$$25+x = \left(\prod_{i=1}^k p_i^{d_i} \right)^2 \quad \text{و} \quad 25-x = \left(\prod_{i=1}^k p_i^{d_i} \right)^2$$

$$\text{لنفج :} \quad n = \prod_{i=1}^k p_i^{d_i} \quad \text{و} \quad m = \prod_{i=1}^k p_i^{d_i} \quad \text{فلنا :} \quad n^2, m^2 \text{ فرديان}$$

$$\text{ومنه :} \quad m^2 \wedge n^2 = 1 \quad \text{و} \quad 25+x = m^2 \quad \text{و} \quad 25-x = n^2$$

$$\text{بما أن :} \quad (m \wedge n) / m^2 \wedge n^2 = 1 \quad \text{فلنا :} \quad m \wedge n = 1$$

وبالتالي يوجد عدداً فرديان طبيعياً m و n بحيث :

$$25-x = n^2 \quad \text{و} \quad 25+x = m^2 \quad \text{و} \quad m \wedge n = 1$$

(3) لتعدد x و y .

حسب السؤالين (1) و (2) واعتبار أن x زوجي و y فردي فلنا :

$$(5) \quad \begin{cases} x = 25 - n^2 = m^2 - 25 \\ y^2 = (25-x)(25+x) = (nm)^2 \\ m \wedge n = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 50 \\ m \wedge n = 1 \\ n \leq m \\ x = 25 - n^2 \\ y = nm \end{cases} \quad \text{يكافئ :}$$

$$\begin{cases} m=7 \\ n=1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} n^2 + m^2 = 50 \\ m \wedge n = 1 \\ n \leq m \end{cases} \quad \text{حلول التهمة :}$$

ومنه : $(y=24 \text{ و } x=7)$ أو $(y=7 \text{ و } x=24)$

(4) لتستنتج حلول المعادلة : $x^2 + y^2 = 625$: $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

ليكن : $d = x \wedge y$: إذن : $x = da$; $y = dp$; $a \wedge p = 1$: $\exists (a, p) \in \mathbb{N}^* :$

$$d^2(a^2 + p^2) = 25 \quad \text{و} \quad a \wedge p = 1 \quad (4) \Leftrightarrow$$

ومنه : $d^2 | 25$: إذن : $d | 5$: أي : $d = 1$ أو $d = 5$

و إذا كان : $d = 1$: فإن : $a^2 + p^2 = 625$ و $a \wedge p = 1$

ومنه : $(a, p) \in \{(24, 7); (7, 24)\}$

و إذا كان : $(x, y) \in \{(24, 7); (7, 24)\}$

* وإذا كان : $d = 5$: فإن : $a^2 + p^2 = 25$: $(2) \quad (a, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : a \wedge p = 1$

الحلول المناسبة للمعادلة (2) هي : $(a, p) \in \{(3, 4); (4, 3)\}$

ومنه : $(x, y) \in \{(25, 20); (20, 25)\}$

وبالتالي حلول المعادلة (1) هي : $S = \{(24, 7); (7, 24); (25, 20); (20, 25)\}$

84 (1) أ- حدد حسب زوجية العدد الصحيح الطبيعي n : العدد $(n^2+1) \wedge (n+1)$

ب- بين أن العدد (n^2+1) ليس مربعاً كاملاً . مما يكت n من \mathbb{N}^* .

(2) لنك a و b و n أعداداً صحيحة طبيعية غير منعدمة بحيث :

$$a(n^2+1) = b^2(n+1) \quad \text{و} \quad a \wedge b = 1$$

أ- بين أن : $a \wedge b^2 = 1$ ثم أن : $a \leq n$ و $b \leq n$

ب- بين أن : $(n^2+1) \wedge (n+1) = 2$

ج- نفرض : $n^2+1 = 2p$ و $n+1 = 2q$: حيث : $\begin{cases} (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

بين أن : $a = q$ و $b^2 = p$

د- نفترض أن : $b = a+1$: أحسب الأعداد a و b و n .

الجواب : (1) أ- لنعدد : $d = (n^2+1) \wedge (n+1)$: $n \in \mathbb{N}$

ليسا : $d | n^2+1$ و $d | n+1$

ومنه : $\begin{cases} d | (n^2+1) - (n^2+1) = 2n \\ d | n+1 \end{cases}$

و إذن : $d | 2(n+1) - 2n$: أي : $d | 2$

ومنه : $d=1$ أو $d=2$

إذا كان n زوجي فإن : $n+1$ و n^2+1 فرديان ومنه : $d=1$

إذا كان n فردي فإن : $n+1$ و n^2+1 زوجيان ومنه : $d=2$

ب- لدينا كل n من \mathbb{N}^* : $n^2 < n^2+1 < (n+1)^2$

إذن : n^2+1 ليس مربعاً كاملاً لكل n من \mathbb{N}^* .

2) ليكن a و b من \mathbb{N}^* بحيث : $a \wedge b = 1$ و $a(n^2+1) = b^2(n+1)$

1- بماتن : $a \wedge b = 1$ فإن : $a \wedge b^2 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} a | b^2(n+1) \\ a \wedge b^2 = 1 \end{array} \right. \xRightarrow{\text{Gauss}} a | n+1$$

إذن : $a \leq n+1$ و $a \neq n+1$ لأن n^2+1 ليس مربعاً كاملاً.

ومنه : $a \leq n$

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 | a(n^2+1) \\ b^2 \wedge a = 1 \end{array} \right. \xRightarrow{\text{Gauss}} b^2 | n^2+1$$

إذن : $b^2 \leq n^2+1$ و $b^2 \neq n^2+1$ لأن n^2+1 ليس مربعاً كاملاً.

ومنه : $b^2 \leq n^2$ أي : $b \leq n$

ب- لدينا : $(n^2+1) \wedge (n+1) = 1$ أو $(n^2+1) \wedge (n+1) = 2$

نفترض أن : $(n^2+1) \wedge (n+1) = 1$

إذن : $(n+1) | a$ ومنه : $a \leq n+1$ ، وهذا يتناقض مع كون $a \leq n$

وبالتالي : $(n^2+1) \wedge (n+1) = 2$

ج- نفرض : $n^2+1 = 2p$ و $n+1 = 2q$ و $p \wedge q = 1$

لنجيب أن : $a = p$ و $b^2 = q$

لدينا : $n+1 = 2q$ و $n^2+1 = 2p$ و $2ap = 2qb^2$

ومنه : $ap = qb^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} a | b^2q \\ a \wedge b^2 = 1 \end{array} \Rightarrow a | q \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} q | ap \\ p \wedge q = 1 \end{array} \Rightarrow q | a \right. \Rightarrow a = q$$

لدينا :

وبما أن $ap = qb^2$ و $a = q$ فإن : $b^2 = p$

د- نفترض أن : $b = a+1$

إذا كان : $b = a + 1$ فإن : $a \wedge b = 1$

ومما سبق فإن : $n^2 + 1 = 2b^2$; $n + 1 = 2a$

ولدينا : $4a^2 = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$$4a^2 = 2b^2 + 2n = 2(a+1)^2 + 2n$$

ومنه : $2a^2 = (a+1)^2 + n$

$$2a^2 = a^2 + 2a + 1 + n$$

$$2a^2 = a^2 + 4a$$

ومنه : $a(a-4) = 0$ أي : $a = 4$; $a \neq 0$

وبالتالي : $a = 4$; $b = 5$; $n = 7$

85

ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

$$A = \frac{n(n+1)}{2} ; B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; C_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(1) بين أن : A_n و B_n و C_n أعداد صحيحة طبيعية .

(2) أحسب : $A_n \wedge B_n$ (يمكنك استعمال الموافقة بنشرديد 3)

(3) نضع : $D_n = C_n \wedge C_{n+1}$

أ- أحسب D_n (يمكنك استعمال الموافقة بنشرديد 2)

ب- بين أنه لكل n من \mathbb{N}^* لدينا :

$$D_n \neq 1$$

(د) الأعداد C_n و C_{n+1} و C_{n+2} أولية فيما بينها .

الجواب : (1) بما أن لكل n من \mathbb{N}^* :

$$A_n = 1 + 2 + \dots + n \quad ; \quad B_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \quad ; \quad C_n = (A_n)^2$$

فإن : A_n و B_n و C_n أعداد صحيحة طبيعية .

(2) حساب : $A_n \wedge B_n$ بدلالة n .

إذا كان : $[3] \quad n = 0$ أي : $n = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$A_n = \frac{3k(3k+1)}{2} \quad ; \quad B_n = \frac{3k(3k+1)(6k+1)}{6}$$

بما أن : $3 \mid 3k(3k+1)(6k+1) \Rightarrow 3 \mid (k+1) = 1 \Rightarrow A_n \in \mathbb{N} \quad B_n \in \mathbb{N}$

فإن : $2 \mid 3 = 1 \quad \text{و} \quad 2 \mid 3k(3k+1) \Rightarrow 3 \mid 3k(3k+1)$

ومنه : $\frac{3k(3k+1)}{6} \in \mathbb{N}^*$ أي : $6 \mid 3k(3k+1)$

وبالتالي : $A_n \wedge B_n = \frac{3k(3k+1)}{6}$

أي : $A_n \wedge B_n = \frac{n(n+1)}{6}$

$(k \in \mathbb{N}) \quad n = 3k+2$: أي $n \equiv 2 \pmod{3}$ إذا كان n

فإن : $B_n = \frac{(3k+2)(3k+2)}{2} \cdot (2k+1) \quad \text{و} \quad A_n = \frac{(3k+2)(3k+2)}{2}$

ومنه : $A_n \wedge B_n = A_n = \frac{n(n+2)}{2}$

$(k \in \mathbb{N}) \quad n = 3k+2$: أي $n \equiv 2 \pmod{3}$ إذا كان n

فإن : $B_n = \frac{(3k+2)(3k+3)}{6} (6k+5) \quad \text{و} \quad A_n = \frac{(3k+2)(3k+3)}{6} \cdot 3$

ومنه : $\left(6 \mid (3k+1)(3k+3) \right) \quad A_n \wedge B_n = \frac{(3k+2)(3k+3)}{6} \left[(6k+5) \wedge 3 \right]$

وبما أن : $((6k+5) = 3(2k) + 5 : \text{أي}) \quad ((6k+5) \wedge 3 = 5 \wedge 3 = 1$

فإن : $A_n \wedge B_n = \frac{(3k+2)(3k+3)}{6}$

أي : $A_n \wedge B_n = \frac{n(n+1)}{6}$

(3) نضع : $D_n = C_n \wedge C_{n+1}$

أي لدينا : $D_n = (A_n)^2 \wedge (A_{n+1})^2 = (A_n \wedge A_{n+1})^2$

$(k \in \mathbb{N}^*) \quad n = 2k$: أي $n \equiv 0 \pmod{2}$ إذا كان n

فإن : $A_{n+1} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1) \quad \text{و} \quad A_n = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$

فإن : $(k \wedge k+1 = 1 : \text{أي}) \quad A_n \wedge A_{n+1} = (2k+1) [k \wedge k+1] = 2k+1$

وبالتالي : $A_n \wedge A_{n+1} = n+1$

ومنه : $D_n = (n+1)^2$

$(k \in \mathbb{N}) \quad n = 1+2k$: أي $n \equiv 1 \pmod{2}$ إذا كان n

فإن : $A_{n+1} = (k+1)(2k+3) \quad \text{و} \quad A_n = (2k+2)(k+1)$

$$A_n \wedge A_{n+1} = (k+1) [(2k+2) \wedge (2k+3)] : \text{ ومنه :}$$

$$= k+1$$

$$A_n \wedge A_{n+1} = \frac{n-1}{2} \quad \text{وبالتالي :}$$

$$D_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \quad \text{ومنه :}$$

ب - (د) لدينا لكل $D_n \{1\} : D_n = (n+1)^2$ و $D_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ و $D_n \neq 1$: ومنه لكل n من $D_n \{1\}$:

(د) لدينا : $C_{n+2} \wedge C_{n+2} \wedge C_n = (C_{n+2} \wedge C_{n+2}) \wedge (C_{n+2} \wedge C_n)$:

$$C_{n+2} \wedge C_{n+2} \wedge C_n = D_{n+2} \wedge D_n \quad \text{ومنه :}$$

إذا كان : $n \equiv 0 \pmod{2}$: فإن : $n+2 \equiv 2 \pmod{2}$:

$$D_{n+2} = \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 \quad \text{و} \quad D_n = (n+1)^2 \quad \text{ومنه :}$$

(ن = 2k) $D_n \wedge D_{n+2} = \left(\left(\frac{n}{2} + 1\right) \wedge (n+1)\right)^2$: إذن :

$$= [(k+1) \wedge (2k+1)]^2$$

بأن : $(k+1) \wedge (2k+1) = 1$: فإن : $D_n \wedge D_{n+2} = 1$:

$$C_{n+2} \wedge C_{n+2} \wedge C_n = 1 \quad \text{ومنه :}$$

إذا كان : $n \equiv 1 \pmod{2}$: فإن : $n+2 \equiv 0 \pmod{2}$:

$$D_{n+2} = (n+2)^2 \quad \text{و} \quad D_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \quad \text{ومنه :}$$

إذن : $D_n \wedge D_{n+2} = \left[\left(\frac{n+1}{2}\right) \wedge (n+2)\right]^2$:

$$= [(k+1) \wedge (2k+3)]^2$$

بأن : $(k+1) \wedge (2k+3) = 1$: فإن : $D_n \wedge D_{n+2} = 1$:

$$C_{n+2} \wedge C_{n+2} \wedge C_n = 1 \quad \text{ومنه :}$$

وبالتالي لكل n من $D_n \{1\}$ لدينا :

$$C_{n+2} \wedge C_{n+2} \wedge C_n = 1$$

أي : الأعداد C_{n+2} و C_{n+2} و C_n أولية فيما بينها .

(1) لكل u, v من \mathbb{Z}^* ، بين أنه إذا كان: $u \wedge v = 1$

فإن: $(u^2 + v^2) \wedge uv = 1$ و $(u^2 + v^2) \wedge v = 1$ و $(u^2 + v^2) \wedge u = 1$

(2) نعتبر في $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ المعادلة: (3) $(x^2 + y^2)z = 26xy$

أ- بين أنه إذا كان: $x \wedge y = 1$ فإننا يوجد z من \mathbb{Z} بحيث:

$$(x^2 + y^2)z = 26$$

ب- أوجد الحلول x, y, z للمعادلة (3) في حالة: $x \wedge y = 1$

ج- استنتج مجموعة حلول المعادلة (3).

الجواب: (1) لدينا: $u \wedge v = 1 \Leftrightarrow \exists (d, p) \in \mathbb{Z}^2: du + pv = 1$

$$\Rightarrow \exists (d, p) \in \mathbb{Z}^2: d^2 u^2 + p^2 v^2 + 2dp uv = 1$$

$$\Rightarrow \exists (d, p) \in \mathbb{Z}^2: p^2 (u^2 + v^2) + [(d^2 - p^2)u + 2dpv]u = 1$$

$$\Leftrightarrow (u^2 + v^2) \wedge u = 1$$

وبالمثل نبيّن أن: $(u^2 + v^2) \wedge v = 1$

وبما أن: $(u^2 + v^2) \wedge u = 1$ و $(u^2 + v^2) \wedge v = 1$

فإن: $(u^2 + v^2) \wedge uv = 1$

$$(e) \text{ أ- لدينا: } \begin{cases} (x^2 + y^2)z = 26xy \\ x \wedge y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2) \mid 26xy \\ (x^2 + y^2) \wedge xy = 1 \end{cases}$$

ومن هنا حسب مبرهنة Gauss: $x^2 + y^2 \mid 26$

$$\text{أي: } \exists k \in \mathbb{Z}: 26 = k(x^2 + y^2)$$

$$(H) \begin{cases} (x^2 + y^2)z = 26xy \\ x \wedge y = 1 \end{cases} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \begin{cases} x \wedge y = 1 \\ k(x^2 + y^2) = 26 \end{cases} \text{ ب- لدينا:}$$

$$\text{فإن: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \wedge y = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x \wedge y = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x \wedge y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ x \wedge y = 1 \end{cases}$$

ومنه: $(x, y) \in \{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1), (2, 3), (-2, 3), (2, -3), (-2, -3)\}$

$$\{(4, 5), (-4, 5), (4, -5), (-4, -5)\} = S_0$$

عكسياً: وإذا كان: $(x, y) \in S_0$ فإن: (x, y) تحقق المعادلة (3).

ولدينا: $z = \frac{26xy}{x^2+y^2}$ باذن حلول المعادلة (1) في حالة: $xy=1$

$$S_2 = \{(-1, -1, 13); (1, 1, 13); (1, -1, -13); (-1, 1, -13); (-2, -3, 12); (-2, 3, -12); (2, 3, 12); (2, -3, -12); (-3, -2, 12); (3, -2, -12); (3, 2, 12); (-3, 2, -12); (1, 5, 5); (-1, 5, -5); (1, 5, -5); (-1, -5, 5); (5, 1, 5); (5, -1, 5); (-5, 1, -5); (-5, -1, 5)\}$$

ج - نفع: $d = xy$ ، باذن: $\begin{cases} x = dx_1 \\ y = dy_2 \\ x_1 y_2 = 1 \end{cases}$ $\exists (x_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$

$$(x^2 + y^2)z = 26xy \Leftrightarrow \begin{cases} x = dx_1; y = dy_2; d \in \mathbb{N}^* \\ (x_1^2 + y_2^2)z = 2x_1 y_2 \\ x_1 y_2 = 1 \end{cases}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي:

$$S = \{ (dx_1, dy_2; z) \mid (x_1, y_2; z) \in S_1 \text{ و } d \in \mathbb{N}^* \}.$$

ليكن p, q من \mathbb{Z}^* .

(1) أثبت أن لكل q من \mathbb{Z} : $1 + q^2 + q^3 \equiv 1 \pmod{2}$

ب - استنتج أن الزوج $(1, q)$ ليس حلاً للمعادلة:

(2) $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: $x^3 + xy^2 + y^3 = 0$

(3) أثبت أن: $PAq=1 \Leftrightarrow P \wedge q^3=1$

جـ استنتج أن الأزواج (p, q) من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ بحيث: $p \neq 1$ و $PAq=1$ ليست حلولاً للمعادلة (1).

(3) استنتج أن المعادلة: $x^3 + x + 1 = 0$ لا تقبل حلاً في \mathbb{Q} .

الاجواب: (1) أ - لدينا لكل q من \mathbb{Z} : $q \equiv 1 \pmod{2}$ أو $q \equiv 0 \pmod{2}$

إذا كان: $q \equiv 0 \pmod{2}$ فإن: $q^2 \equiv 0 \pmod{2}$ و $q^3 \equiv 0 \pmod{2}$

ومنه: $1 + q^2 + q^3 \equiv 1 \pmod{2}$

إذا كان: $q \equiv 1 \pmod{2}$ فإن: $q^2 \equiv 1 \pmod{2}$ و $q^3 \equiv 1 \pmod{2}$

ومنه: $1 + q^2 + q^3 \equiv 3 \pmod{2}$ أي $1 + q^2 + q^3 \equiv 1 \pmod{2}$

وبالتالي : $\forall q \in \mathbb{Z} : 1 + q^2 + q^3 \equiv 1 \pmod{2}$ [4]
 ب- نفترض أن : $(1, q)$ حلاً للمعادلة (2) أي : $1 + q^2 + q^3 = 0$
 إذن : [2] $1 + q^2 + q^3 \equiv 0 \pmod{2}$ ، وهذا يتناقض مع كون كل q من \mathbb{Z} :

$$1 + q^2 + q^3 \equiv 1 \pmod{2}$$

وبالتالي : $(1, q)$ ليس حلاً للمعادلة (2)

$$p \wedge q = 1 \Leftrightarrow p \wedge q^3 = 1$$

(2) - لنثبت أن : إذا كان : $p \wedge q = 1$ فإننا حسب مبرهنة Bezout :

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : up + vq = 1$$

$$(up + vq)^3 = 1 \Leftrightarrow (u^3p^3 + 3u^2p^2qv + 3uv^2q^2p + v^3q^3) = 1$$

$$\exists (u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2 : u_0p + v_0q^3 = 1$$

$$p \wedge q^3 = 1$$

(\Leftarrow) وإذا كان : $p \wedge q^3 = 1$ فإننا حسب مبرهنة Bezout :

$$\exists (u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2 : u_1p + v_1q^3 = 1$$

$$\exists (u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2 : u_2p + v_2q = 1$$

$$p \wedge q = 1$$

$$p \wedge q = 1 \Leftrightarrow p \wedge q^3 = 1$$

ب- ليكن (p, q) من $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ بحيث : $|p| \neq 1$ و $p \wedge q = 1$

نفترض أن (p, q) حلاً للمعادلة (2) إذن : $p^3 + pq^2 + q^3 = 0$

$$p \mid q^3 \quad \text{أي : } q^3 = -p(p^2 + q^2)$$

ومنه : $p \wedge q^3 = |p| \neq 1$ ، وهذا يتناقض مع كون $p \wedge q = 1$ (إذن : $p \wedge q^3 = 1$)

وبالتالي : (p, q) ليس حلاً للمعادلة (2) . بحيث : $|p| \neq 1$ و $p \wedge q = 1$

(4) - لدينا : $x = 0$ ليس حلاً للمعادلة : $x^3 + x + 1 = 0$ في \mathbb{Q} (2)

- نفترض أنه يوجد $x = \frac{p}{q}$ من \mathbb{Q}^* حلاً للمعادلة (2) بحيث :

$$(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \quad ; \quad p \wedge q = 1$$

$$p^3 + pq^2 + q^3 = 0 \quad \text{أي : } \frac{p^3}{q^3} + \frac{p}{q} + 1 = 0$$

وإذا ن : (p, q) حلًا للمعادلة (3) وهذا متناقض مع كون المعادلة (3) لا تقبل حلولاً في $2^k \times 2^l$.
وبالتالي المعادلة : $x^3 + x + 1 = 0$ لا تقبل حلًا في \mathbb{Q} .

88

ليكن n من \mathbb{N} ، نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة :

$$(1) \quad (x-2n)(y-2n) = 2n^2$$

$$d = (x-2n) \wedge (y-2n) : \text{ ليكن } (1)$$

$$d \mid x \wedge y : \text{ نثبت أن } (2)$$

$$(x \wedge y) \mid d : \text{ بين أن : } x^2 + y^2 = (x+y-2n)^2 \text{ واستنتج أن : } (3)$$

$$(x \wedge y) \mid n : \text{ بين أن : } (4)$$

$$(4) \text{ حدد } x \text{ و } y \text{ إذا علمت أن : } x \wedge y = 1 \text{ و } n = 3.$$

الجواب : (1) ليكن $d = (x-2n) \wedge (y-2n)$

$$\begin{cases} d \mid x-2n \\ d \mid y-2n \end{cases} \Rightarrow d^2 \mid (x-2n)(y-2n) : \text{ إذاً : } (2)$$

$$\Rightarrow d^2 \mid 2n^2 : \text{ إذاً : } (3)$$

$$d^2 \mid (2n)^2 \text{ ومنه : } d \mid 2n : \text{ إذاً : } (4)$$

$$\begin{cases} d \mid x-2n \\ d \mid y-2n \\ d \mid 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow d \mid (x \wedge y) : \text{ لدينا : } (5)$$

$$x^2 + y^2 = (x+y-2n)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2n(x+y) : (2)$$

$$\Leftrightarrow 2xy - 4n(x+y) + 4n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow xy - 2n(x+y) + 2n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2n)(y-2n) = 2n^2$$

ليكن $\sigma = x \wedge y$ ، نبين أن : $\sigma \mid d$

$$\begin{cases} \sigma \mid x \\ \sigma \mid y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma^2 \mid x^2 \\ \sigma^2 \mid y^2 \end{cases} \Rightarrow \sigma^2 \mid x^2 + y^2 : \text{ إذاً : } (3)$$

$$\text{ ومنه : } \sigma^2 \mid (x+y-2n)^2 : \text{ إذاً : } \sigma \mid x+y-2n$$

$$\begin{cases} \sigma/x \\ \sigma/x+y-2n \\ \sigma/y \\ \sigma/d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma/x-2n \\ \sigma/y-2n \end{cases} \quad \text{لدينا إذن:}$$

ومنه: $\sigma/(x-2n) \wedge (y-2n)$ أي: $(x \wedge y) | d$ وبالتالي:

(3) نبين أن: $(x \wedge y) | d$

لدينا: $d | 2n$ لأن: $2n = k'd$: $\exists k' \in \mathbb{N}$

لأن: $4n^2 = k'^2 d^2$ (1)

ولدينا: $d^2 | 2n^2$ لأن: $2n^2 = k'' d^2$: $\exists k'' \in \mathbb{N}$

لأن: $4n^2 = 2k'' d^2$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: $k'^2 d^2 = 2k'' d^2$ أي: $k'^2 = 2k''$

لأن: k' عدد زوجي: $k' = 2k'''$: $\exists k''' \in \mathbb{N}$

ومنه: $2n = 2k''' d$ أي: $n = k''' d$

لأن: $d | n$

وبما أن: $d | n$ و $(x \wedge y) | d$ فإن: $(x \wedge y) | n$

(4) نحل في \mathbb{Z}^2 المعادلة $(x-6)(y-6) = 28 = 2 \times 7$ و $x \wedge y = 2$

سأف: $x \wedge y = 1$ فإنه حسب السؤال (2) $(x-6) \wedge (y-6) = 1$

$\begin{cases} x-6=1 \\ y-6=28 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x-6=-1 \\ y-6=-28 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x-6=2 \\ y-6=7 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x-6=-2 \\ y-6=-7 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} x=7 \\ y=24 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=5 \\ y=-22 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=8 \\ y=15 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$

ملاحظة إذا كان (x, y) حلاً للمعادلة (2) فإن (y, x) هو أيضاً حلاً للمعادلة (2) ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي:

$S = \{(7, 24); (24, 6); (5, -22); (-22, 5); (8, 15); (15, 8); (4, -3); (-3, 4)\}$

I - ليكن n من $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ، نمرر $\sigma(n)$ لمجموع

القواسم الموجبة للعدد n و \mathcal{P}^+ لمجموعة الأعداد الأولية الموجبة

$$(1) \text{ بين أن : } \forall p \in \mathcal{P}^+ : \sigma(p^2) = \frac{p^{3+1} - 1}{p - 1}$$

$$(2) \text{ ليكن } x = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i} \text{ التعبير لعدد عوامل أولية للعدد } x$$

$$\text{نبا أن : } \sigma(x) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1} \right)$$

$$(3) \text{ يجب أنه إذا كان } x, y \text{ من } \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \text{ و } xy = 1$$

$$\text{فيكون : } \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$$

II - تعريف : ليكن n من \mathbb{N}^* ، نقول إذا العدد n كامل إذا كان :

$$\sigma(n) = 2n$$

نقول إن M_n عدد Mersenne إذا كان : $M_n = 2^n - 1$

$$(1) \text{ ليكن } x \text{ من } \mathbb{N} \text{ بحيث } n \text{ من } \mathbb{N} : x \in \mathbb{N}$$

$$\text{بين أن : } x^2 - 1 \in \mathcal{P}^+$$

$$(2) \text{ ليكن } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ بحيث } n \geq 2$$

$$\text{نبا أن : } 2^n - 1 \in \mathcal{P}^+ \Rightarrow n \in \mathcal{P}^+$$

(3) أحسب M_{22} ، هل M_{22} أولي ؟ ماذا يمكنك أن تستنتج ؟

$$\text{III - ليكن } p \text{ من } \mathbb{N}^* : \text{نضع : } N_p = 2^{p-1} (2^p - 1)$$

$$(1) \text{ بين أنه إذا كان } N_p \text{ كامل فيكون } p \text{ أولي.}$$

$$(2) \text{ ليكن } n \text{ عدد زوجي كامل.}$$

$$1 - \text{بين أنه يوجد } a \text{ و } b \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ بحيث : } n = 2^a \cdot b \text{ و } b \text{ فردي.}$$

$$2 - \text{بين أنه يوجد } c \text{ من } \mathbb{N} \text{ بحيث : } b = (2^a - 1)c \text{ و } \sigma(b) = 2^{a+1} \cdot c$$

$$3 - \text{بين أن : } c = 1$$

الجواب : I - (1) القواسم الموجبة للعدد p^2 هي : $1, p, p^2, \dots, p^p$

$$\sigma(p^2) = 1 + p + p^2 + \dots + p^p$$

(مجموع حدود متناهية)
للمثالية هندسية أساسها p

$$\sigma(p) = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$$

وبالتالي:

(1) ليكن $x = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i}$ التفتك لجداء عوامل أولية للعدد x .

$$\sigma(x) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1} \right) \quad \text{لنثبت أن:}$$

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1} \right) = \prod_{i=1}^n (1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{a_i}) \quad \text{لدينا:}$$

$$= (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{a_1}) (1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{a_2}) \dots (1 + p_n + p_n^2 + \dots + p_n^{a_n})$$

$$= \sum_{\substack{0 \leq b_1 \leq a_1 \\ 0 \leq b_2 \leq a_2 \\ \vdots \\ 0 \leq b_n \leq a_n}} p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_n^{b_n} \quad (p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_n^{b_n} \in \mathcal{D}^+(x))$$

$$= \sum_{d \in \mathcal{D}^+(x)} d = \sigma(x)$$

$$\sigma(x) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1} \right) \quad \text{وبالتالي:}$$

(2) ليكن $x = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i}$ و $y = \prod_{j=1}^m q_j^{b_j}$ حيث $p_i \neq q_j$.
التفتك لجداء عوامل أولية لكل من x و y .

$$\sigma(xy) = \sigma(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n} q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_m^{b_m}) \quad \text{لدينا:}$$

$$= \frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_n^{a_n+1} - 1}{p_n - 1} \frac{q_1^{b_1+1} - 1}{q_1 - 1} \frac{q_2^{b_2+1} - 1}{q_2 - 1} \dots \frac{q_m^{b_m+1} - 1}{q_m - 1}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\sigma(x)} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\sigma(y)}$

$$\sigma(xy) = \sigma(x) \sigma(y) \quad \text{وبالتالي:}$$

(II - 1) ليكن x من \mathbb{N} بحيث: $x \geq 3$ و $n \geq 2$

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) \quad \text{لدينا:}$$

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 \geq 2 \quad \text{و} \quad x - 1 \geq 2$$

$$\therefore x^n - 1 \notin 3^+$$

$$(2) \text{ لنثبت أن: } n \geq 2, \quad 2^n - 1 \in 3^+ \Rightarrow n \in 3^+ \quad \text{لدينا:}$$

البرهان بالتلف: نفترض أنه: $n \notin 3^+$ أي: $n = p \cdot q$ و $p \geq 2, q \geq 2$: $\exists(p, q) \in \mathbb{N}^2$

$$2^n - 1 = 2^{p^q} - 1 = (2^p)^q - 1 \quad \text{لاحظ}$$

$$2^n - 1 = (2^p - 1)(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \dots + 2^p + 1)$$

$$2^p - 1 \geq 3 \quad \text{فإن} \quad p \geq 2 \quad \text{بما أن}$$

$$(2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \dots + 2^p + 1 \geq 2 \quad \text{فإن} \quad p \geq 2 \quad \text{و} \quad q \geq 2$$

$$2^n - 1 \in \mathcal{P}^+ \quad \text{و} \quad 2^p - 1 \notin \mathcal{P}^+ \quad \text{تناقض مع كون}$$

$$n \in \mathcal{P}^+ \quad \text{وبالتالي}$$

$$M_{12} = 2^{41} - 1 = 2047 = 23 \times 89 \quad \text{لدينا} \quad (3)$$

$$M_{12} \notin \mathcal{P}^+ \quad \text{ومنه}$$

$$n \in \mathcal{P}^+ \quad \Rightarrow \quad 2^n - 1 \in \mathcal{P}^+ \quad \text{ونستنتج أن}$$

$$p \in \mathcal{N}^+ \quad \exists \quad N_p = 2^{p-1}(2^p - 1) \quad \text{ليكن} \quad \text{III - 1}$$

$$\sigma(N_p) = 2N_p \quad \text{نعتبر أن} \quad N_p \gg 2 \quad \text{كامل} \quad \text{و} \quad \text{إذن}$$

$$2^{p-1} \wedge (2^p - 1) = 1 \quad \text{لبيبي أن}$$

$$\begin{cases} d \mid 2^p \\ d \mid 2^{p-1} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} d \mid 2^{p-1} \\ d \mid 2^p - 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \text{إذن} \quad d = 2^{p-1} \wedge (2^p - 1) \quad \text{نعم}$$

$$2^{p-1} \wedge (2^p - 1) = 1 \quad \text{وبالتالي} \quad d \mid 1 \quad \text{ومنه}$$

$$\sigma(N_p) = \sigma(2^{p-1}) \sigma(2^p - 1) \quad \text{لاحظ}$$

$$2^p(2^p - 1) = \frac{2^p - 1}{2 - 1} \cdot \sigma(2^p - 1)$$

$$\sigma(2^p - 1) = (2^p - 1) + 1 \quad \text{لاحظ} \quad \sigma(2^p - 1) = 2^p \quad \text{ومنه}$$

$$\mathcal{D}_{2^p - 1} = \{1, 2^p - 1\} \quad \text{لاحظ}$$

$$2^p - 1 \in \mathcal{P}^+ \quad \text{وبالتالي}$$

$$(2) \quad \text{ليكن} \quad n \text{ عدد زوجي كامل}$$

$$1 - \text{ليكن} \quad a \text{ أكبر عدد صحيح طبيعي بحيث} \quad 2^a \mid n \quad \text{و} \quad 2^{a+1} \nmid n$$

$$b \in \mathcal{N}^+ \quad n = 2^a b \quad \text{فإن} \quad 2^a \mid n \quad \text{بما أن}$$

$$(b \in \mathcal{N}^+) \quad b = 2^k \quad \text{فإن} \quad \text{إذا كان} \quad \text{زوجي} \quad \text{فإن}$$

$$2^{a+1} \mid n \quad \text{فإن} \quad n = 2^{a+1} k \quad \text{و} \quad \text{لاحظ}$$

إذاً: b فردي.

وبالتالي: b فردي \bar{b} $n = 2^a \cdot b$ $\exists (a, b) \in \mathbb{N}^4 \times \mathbb{N}^4$

ب - لدينا: n عدد كامل إذاً: $\sigma(n) = 2n$ \bar{b} $n = 2^a \cdot b$ b فردي

$$\sigma(2^a \cdot b) = 2^{a+1} \cdot b \quad \text{إذاً:}$$

$$(2^a \wedge b = 1) \quad \sigma(2^a) \cdot \sigma(b) = 2^{a+1} \cdot b$$

$$(2^{a+1} - 1) \sigma(b) = 2^{a+1} \cdot b$$

$$(2^{a+1} - 1) \wedge 2^a = 1 \quad \bar{b} \quad 2^{a+1} - 1 \mid 2^{a+1} \cdot b \quad \text{إذاً:}$$

$$2^{a+1} - 1 \mid b \quad \text{ومنه:}$$

$$\exists c \in \mathbb{N}^4 : b = (2^{a+1} - 1) \cdot c \quad \text{أي:}$$

$$(2^{a+1} - 1) \sigma(b) = (2^{a+1} - 1) \cdot c \cdot 2^{a+1} \quad \text{إذاً:}$$

$$\sigma(b) = 2^{a+1} \cdot c \quad \text{ومنه:}$$

ج - لنبين أن: $c = 1$

نعترض ضااً: $c \geq 2$ ولدينا: $b = (2^{a+1} - 1) \cdot c$

$$\sigma(b) \geq 1 + c + (2^{a+1} - 1) \cdot c \quad \text{إذاً:}$$

$$2^{a+1} \cdot c \geq 2^{a+1} \cdot c + 1$$

$$\text{ومنه: } 0 \geq 1 \quad \text{مناقض}$$

$$b = 2^{a+1} - 1 \quad \text{وبالتالي: } c = 1 \quad \text{ومنه:}$$

90 (أ) ليكن x و y من \mathbb{Z}

يبين أن: $x - 2y$ و $x + 2y$ لهما نفس الزوجية.

$$x^2 - 4y^2 = 36 \quad \text{(أ) حل في } \mathbb{Z}^2 \text{ المعادلة:}$$

الجواب: (أ) ليكن x و y من \mathbb{Z} لدينا: $(x + 2y) + (x - 2y) = 2x$

ومنه: $x - 2y$ و $x + 2y$ لهما نفس الزوجية.

$$(أ) \text{ لدينا: } (x + 2y)(x - 2y) = 36 = 2 \cdot 18 \Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=6 \\ x-2y=6 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x+2y=-6 \\ x-2y=-6 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x+2y=2 \\ x-2y=18 \end{cases}$$

$$\text{أو } \begin{cases} x+2y=-2 \\ x-2y=-18 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x+2y=18 \\ x-2y=1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x+2y=-18 \\ x-2y=-2 \end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي :

$$S = \{ (6, 0) ; (-6, 0) ; (10, 4) ; (-10, 4) ; (10, 4) ; (-10, 4) \}$$

91

نعتبر في $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ المعادلة : (E) : $x^2 + y^2 = z^2$

ولتكن S مجموعة حلول المعادلة (E)

(2) بين أنه إذا كان : $(x, y, z) \in S$ ، فإن $x \wedge y = y \wedge z = z \wedge x$

(2) نضع : $S = x \wedge y = y \wedge z = z \wedge x$

أ- بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة (E') : $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x \wedge y = y \wedge z = z \wedge x = 1 \end{cases}$

ب- لتكن S' مجموعة حلول المعادلة (E') ، ونضع : $d = (z-x) \wedge (z+x)$

بين أنه إذا كان : $(x, y, z) \in S'$ ، فإن $d = 2$ أو $d = 1$

ج- حل المعادلة (E')

(3) استنتج حلول المعادلة (E) .

الجواب : (1) ليكن $(x, y, z) \in S$ ، إذا

$$y^2 = 1 \cdot z^2 - x^2 \quad \text{و} \quad z^2 = 1 \cdot x^2 + y^2$$

$$y^2 \wedge z^2 = z^2 \wedge x^2 \quad \text{و} \quad x^2 \wedge y^2 = y^2 \wedge z^2$$

$$(y \wedge z)^2 = (x \wedge y)^2 = (y \wedge z)^2$$

$$x \wedge y = y \wedge z = z \wedge x$$

(2) ليكن $S = x \wedge y = y \wedge z = z \wedge x$ ، إذن يوجد (x, y, z) من $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ بحيث :

$$x = \delta x \quad \text{و} \quad y = \delta y \quad \text{و} \quad z = \delta z \quad \text{و} \quad x \wedge y = y \wedge z = z \wedge x = 1$$

$$(E) : x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow \delta^2 (x^2 + y^2) = \delta^2 z^2 ; x \wedge y = y \wedge z = z \wedge x = 1$$

$$(E) \Leftrightarrow (E') : x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{و} \quad x \wedge y = y \wedge z = z \wedge x = 1$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x \wedge y = y \wedge z = z \wedge x = 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad d = (z-x) \wedge (z+x) \quad \text{و} \quad y^2 = (z-x) \cdot (z+x)$$

$$\begin{cases} d \mid z-x \\ d \mid z+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 2z \\ d \mid 2x \end{cases} \Rightarrow d \mid 2(z \wedge x) \Rightarrow d \mid 2$$

ومنه : $d \in \{1, 2\}$

ج. - لنحل المعادلة (E') : $x^2 + y^2 = z^2$ و $x \wedge y = y \wedge z = z \wedge x = 1$

الحالة 2 : إذا كان $d = 1$

بمعنى أن $z+x$ و $z-x$ هما نفس الزوجية فهما فرديان

$$\left\{ \begin{array}{l} ab = c^2 \\ a \wedge b = 1 \\ (a, b) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = u^2 \\ b = v^2 \\ c = uv \\ uv \neq 0 \end{array} \right. ; (u, v) \in \mathbb{N}^2$$

(E') $\Leftrightarrow \begin{cases} z-x = u^2 \\ z+x = v^2 \\ y = uv \\ uv = 2 \end{cases}$ (u و v فردیات)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{v^2 + u^2}{2} \\ x = \frac{v^2 - u^2}{2} \\ y = uv \\ uv = 2 \quad ; \quad v \geq u \geq 2 \quad ; \quad (u, v) \text{ زوجان} \end{cases}$$

الحالة 2: إذا كان $z = 0$ ، ولدينا $x^2 = (z-y)(z+y)$

$x' = 2$, $y' = 1$: إذن $x' = (x - y)(x + y)$ نضع

۱) $d = 2$: فان : $2/x$ و $2/y$: $x \wedge y \geq 2$ متافق
 ۲) $d = 2$: $x \wedge y = 1$: $(d = 2 : 2/2)$

$$d' = 1 \quad \therefore \{0, 5\}$$

(ع) $\Leftrightarrow \begin{cases} z - y = u^2 \\ z + y = v^2 \\ x = uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = \frac{v^2 - u^2}{2} \\ z = \frac{v^2 + u^2}{2} \end{cases} \quad : \text{مثال}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E') هي :

$$S' = \left\{ (u, v; \frac{v^2 - u^2}{2}, \frac{v^2 + u^2}{2}); (\frac{v^2 - u^2}{2}, u, v, \frac{v^2 + u^2}{2}) \mid \begin{cases} u, v \text{ فرد و زوج} \\ u, v = 2 \\ u \geq v \geq 1 \\ (u, v) \in \mathbb{N}^2 \end{cases} \right\}$$

$S = \left\{ \left(\delta_{uv}, \delta, \frac{v^2 - u^2}{2} \right); \left(\delta, \frac{v^2 - u^2}{2}, \delta_{uv} \right); \left(\delta, \frac{v^2 - u^2}{2}, \delta, \frac{v^2 + u^2}{2} \right) \right\} / \left\{ \begin{array}{l} \delta_{uv} \text{ غير بأك} \\ \delta_{uv} \text{ غير بأك} \\ \delta_{uv} \text{ غير بأك} \end{array} \right\}$

نعتبر في \mathbb{N}^2 المعادلة (E): $x^2 - 6x - 63 = y^2$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E)

- (1) من أجله إذا كان: $(x, y) \in S$ فإن: $x \geq 12$.
- (2) بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $(E'): (x-3-y)(x-3+y) = 72$.
- (3) بين أنه إذا كان: $(x, y) \in S$ فإن: $(x-3-y)$ و $(x-3+y)$ زوجيان
وأن: $x-3+y \geq x-3-y > 0$
- (4) حل المعادلة (E).

- الجواب: (1) ليكن (x, y) من S إذن: $x^2 - 6x - 63 = y^2$
ومنه: $x^2 - 6x - 63 \geq 0$ أي: $(x-3)^2 \geq 72$
أي: $x-3 \geq \sqrt{72}$ أو $x-3 \leq -\sqrt{72}$ (لا يمكن)
ومنه: $x \geq 3 + \sqrt{72} > 12$ إذن: $x \geq 12$
- (2) لدينا: $(E) \Leftrightarrow x^2 - 6x - 63 = y^2$
 $\Leftrightarrow (x-3)^2 - y^2 = 72$
 $\Leftrightarrow (x-3-y)(x-3+y) = 72$ (E')
- (3) بمضاد: $(x-3-y)(x-3+y) = 72$ زوجي
و $(x-3-y) + (x-3+y) = 2x-6$ زوجي
فإن $(x-3-y)$ و $(x-3+y)$ زوجيان
لدينا: $y \in \mathbb{N}$ إذن: $x-3+y \geq x-3-y$
لنبين أن: $x-3-y > 0$
نفرض أن: $x-3-y \leq 0$ إذن: $x-3+y < 0$ (أف: $72 > 0$)
ومنه: $y < -x+3$
وبما أن: $x \geq 12$ فإن: $-x \leq -3$ ، ومنه: $y < -9$
تتعارض مع كون: $y \in \mathbb{N}$ إذن: $x-3-y > 0$
وبالتالي: $x-3+y > 0$
- (4) لنحل المعادلة (E) لنسا: $\mathcal{D}_{72}^+ = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$
مجموعة حلول المعادلة (E) هي:

$$S = \{(22, 17), (14, 7), (12, 3)\}$$

أُتجزئ العمليات التالية :

$$A = \overline{110110}^{(2)} + \overline{11011}^{(2)}$$

$$B = \overline{11101}^{(2)} - \overline{10011}^{(2)}$$

$$C = \overline{11001}^{(2)} \times \overline{1011}^{(2)}$$

$$\begin{array}{r} \overline{11101}^{(2)} \\ - \overline{10011}^{(2)} \\ \hline \overline{1010}^{(2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{110110}^{(2)} \\ + \overline{11011}^{(2)} \\ \hline \overline{1010001}^{(2)} \end{array}$$

الجواب : لدينا :

$$\begin{array}{r} \overline{11001}^{(2)} \\ \times \overline{1011}^{(2)} \\ \hline \begin{array}{r} 11001 \\ 11001 \\ 0000 \\ 11001 \end{array} \\ \hline \overline{100010011}^{(2)} \end{array}$$

$$\overline{36}^{(x)} + \overline{45}^{(x)} = \overline{103}^{(x)}$$

ليكن x من N^8 يجب

$$\overline{36}^x \times \overline{45}^{(x)}$$

أجب :

الجواب : ملاحظة : $\overline{36}^{(x)} \Rightarrow x > 6$

$$\overline{36}^{(x)} + \overline{45}^{(x)} = \overline{103}^{(x)} \Leftrightarrow (3x+6) + (4x+5) = x^2 + 3 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{و} \quad x = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \quad (x > 6 \text{ إذن})$$

$$\overline{36}^x \times \overline{45}^{(x)} = (3x+6)(4x+5) \quad \text{لدينا :}$$

$$= 12x^2 + 39x + 30$$

$$= (8+4)x^2 + (4 \times 8 + 7)x + 3 \times 8 + 6$$

$$= (x+4)x^2 + (4x+7)x + 3x + 6$$

$$= x^3 + 8x^2 + (8+2)x + 6 = 2x^3 + x^2 + 2x + 6$$

$$\overline{36}^{(x)} \times \overline{45}^{(x)} = \overline{2126}^{(x)}$$

وبالتالي :

$$\overline{12551}^{(10)} = \overline{30407}^{(x)}$$

حدد قيمة العدد x بحيث :

95

$$\overline{30407}^{(x)}$$

$$\Rightarrow x > 7$$

الجواب : ملاحظه :

$$\overline{12551}^{(10)} = \overline{30407}^{(x)}$$

$$\Leftrightarrow 12551 = 7 + 4x^2 + 3x^4$$

لدينا :

$$\Leftrightarrow 3x^4 + 4x^2 - 12544$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 64 \quad \Leftrightarrow x = 8$$

$$N = \overline{3427}^{(b)}$$

بعبارة العدد :

96

حدد x في كل حالة من الحالات الآتية :

$$N \equiv 0 \quad [5] \quad ; \quad b = 6 \quad (1)$$

$$N \equiv 0 \quad [3] \quad ; \quad b = 7 \quad (2)$$

$$(x(b) \quad N = \overline{342x}^{(b)})$$

$$= x + 2b + 4b^2 + 3b^3$$

لدينا :

الجواب :

$$b^3 \equiv 1 \quad [5] \quad ; \quad b^2 \equiv 1 \quad [5] \quad ; \quad b \equiv 1 \quad [5] \quad ; \quad b = 1 \quad (1)$$

$$N \equiv x + 2 + 4 + 3 \quad [5] \quad \text{ومنه}$$

$$N \equiv x + 4 \quad [5]$$

$$N \equiv 0 \quad [5] \quad \Leftrightarrow x + 4 \equiv 0 \quad [5] \quad \text{ومنه}$$

$$x + 4 \equiv 0 \quad [5] \quad ; \quad x + 4 \in [4, 9] \quad \text{فإن} \quad x \in [0, 5] \quad \text{وبما أن}$$

$$N = \overline{3421}^{(6)} \quad \text{ومنه} \quad x + 4 = 5 \quad \text{أي} \quad x = 1 \quad \text{وهذا هو الجواب}$$

$$b^3 \equiv 1 \quad [3] \quad ; \quad b^2 \equiv 1 \quad [3] \quad ; \quad b \equiv 1 \quad [3] \quad ; \quad b = 1 \quad (2)$$

$$N \equiv x + 2 + 4 + 3 \quad [3] \quad \text{ومنه}$$

$$N \equiv x \quad [3]$$

$$N \equiv 0 \quad [3] \quad \Leftrightarrow x \equiv 0 \quad [3] \quad \text{ومنه}$$

$$x \in \{0, 3, 6\} \quad \text{وبما أن} \quad x \equiv 0 \quad [3] \quad ; \quad x \in [0, 6] \quad \text{فإن} \quad x = 0$$

$$N = \overline{3426}^{(7)} \quad \text{ومنه} \quad N = \overline{3423}^{(7)} \quad \text{أو} \quad N = \overline{3420}^{(7)}$$

١١ لأنه إذا كان: $y=6$ فإن: $4x-5y=1$ إذن: $-9z \equiv 1 \pmod{2}$ ، ومنه:

$z \equiv 1 \pmod{2}$ ، إذن z عدد فردي

وبما أن: $x \leq 6$ فإن: $5y \leq 11$ أي: $3 \leq 2$

وبما أن: z فردي فإن: $z=1$ ، ومنه: $x=3$

وبالتالي الحل الوحيد في هذه الحالة هو: $(3, 6, 1)$

بالتالي: $\{(x, y, z) \in \{(5, 0, 2), (3, 6, 1)\}\} \Leftrightarrow \overline{xy}^{(7)} = \overline{yx}^{(12)}$

97

ليكن a, b, c من \mathbb{N} ،
عدد a, b, c بحيث

$$\begin{cases} \overline{abca}^{(10)} \equiv 0 \pmod{7} \\ \overline{abca}^{(10)} \equiv 1 \pmod{99} \end{cases}$$

الجواب: نضع ، $N = \overline{abca}^{(10)}$

$$N = a + 10c + 100b + 1000a$$

حيث: a, b, c من $[0, 9]$

بما أن: $10 \equiv 3 \pmod{7}$ و $100 \equiv 2 \pmod{7}$ و $1000 \equiv 6 \pmod{7}$

$$N \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow 3c + 2b \equiv 0 \pmod{7}$$

بما أن: $1000 \equiv 1 \pmod{99}$ و $100 \equiv 1 \pmod{99}$ و $10 \equiv 1 \pmod{99}$ فإن: $N \equiv 1 \pmod{99}$ ، $N \equiv 1 \pmod{9}$ ، $N \equiv 1 \pmod{11}$

$$N \equiv 1 \pmod{9} \Leftrightarrow 1a + b + c - 1 \equiv 0 \pmod{9}$$

$$N \equiv 1 \pmod{11} \Leftrightarrow c - b + 1 \equiv 0 \pmod{11}$$

ومنه نحصل على النظام التالي:

$$\begin{cases} 2b + 3c \equiv 0 \pmod{7} & (1) \\ 1a + b + c - 1 \equiv 0 \pmod{9} & (2) \\ c - b + 1 \equiv 0 \pmod{11} & (3) \end{cases}$$

حيث: a, b, c من $[0, 9]$ ، إذن: $-9 \leq -b \leq 0$ و $0 \leq c - b \leq 9$

$$-8 \leq c - b + 1 \leq 10$$

وبما أن: $11 | c - b + 1$ فإن: $c - b + 1 = 0$

$$b = c + 1$$

ليكن a, b, c من \mathbb{N} بحيث : $N = \overline{abc}^{(10)}$

98

بين أن : $N \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow (2a-c)^2 + 2b^2 \equiv 0 \pmod{17}$

الجواب : لوينا : $N = \overline{abc}^{(10)} = 100a + 10b + c$

مما أن : $100 \equiv -2 \pmod{17}$ فإن : $N \equiv -2a + 10b + c \pmod{17}$

ومنه : $N \equiv 0 \pmod{17} \Leftrightarrow -2a + 10b + c \equiv 0 \pmod{17}$

$$\Leftrightarrow 2a - 10b - c \equiv 0 \pmod{17}$$

$$\Leftrightarrow 2a - c \equiv 10b \pmod{17}$$

$$\Rightarrow (2a-c)^2 \equiv 100b^2 \pmod{17}$$

$$\Rightarrow (2a-c)^2 + 2b^2 \equiv 0 \pmod{17} \quad (100 \equiv -2 \pmod{17})$$

حدد x, y, z من \mathbb{N} بحيث : $N = \overline{xyz}^{(7)} = \overline{zyx}^{(11)}$

99

الجواب : نضع : $N = \overline{xyz}^{(7)} = \overline{zyx}^{(11)}$

ومنه : x, y, z من \mathbb{Z} نسبق بالثلاثة

لوينا : $N = \overline{xyz}^{(7)} = 3 + 7y + 49x$

$N = \overline{zyx}^{(11)} = x + 11y + 121z$

ومنه : $3 + 7y + 49x = x + 11y + 121z$

$$\Leftrightarrow 120z + 4y - 48x = 0 \Leftrightarrow 30z + y - 12x = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 6(2x - 5z) \Rightarrow 6 \mid y$$

$$\Rightarrow y \in \{0, 6\} \quad (y \in \mathbb{Z}, 0 \leq y < 7)$$

إذا كان : $y = 0$ فإن : $2x = 5z$: $5 \mid 2x$: $5 \mid 2x$

فإنه حسب مبرهنه Gauss : $5 \mid x$ ومنه : $x \in \{0, 5\}$

$$x = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{غير ممكن}$$

$$x = 5 \Leftrightarrow z = 5$$

ومنه الحل الوحيد في هذه الحالة هو : $(5, 0, 2)$

لدينا، $b=c+a$ و $2a+b+c-1=0$ [9]

ومنه: $2(a+c)=0$ [9]

بما أن: $9 \mid a+c$ فإن: $9 \mid 2(a+c)$ و $9 \mid 2$ و $9 \mid 2(a+c)$

إذن: $a+c \in \{0, 18\}$ و $9 \mid a+c$

وهذه: $a+c=9$ أو $a+c=18$ غير ممكن لأنها
 لا تحقق المعادلة (3) $a=c=3$

وبالتالي: $a=9-c$ و $c \in \{1, 8\}$

وبتعويض b في المعادلة (3): $2b+3c=0$ [7]

ومنه: $5c=5$ [7]

إذن: $\begin{cases} 5 \wedge 7=1 \\ 7 \mid 5(c-2) \end{cases} \Rightarrow 7 \mid c-1$

ومنه: $c-1=0$ أو $c-1=7$ (لا) $(c-1) \in \{-1, 8\}$

أي: $c=1$ أو $c=8$

إذا كان $c=1$ فإن: $b=2$ و $a=3$ ومنه: $N=8218$

إذا كان: $c=8$ فإن: $b=9$ و $a=1$ ومنه: $N=1981$

100 نفع: $a = \overline{2310}^{(n)}$ و $b = \overline{252}^{(n)}$ $d = a \wedge b$

(1) بين أن: $(2n+1) \mid a$ و $(2n+1) \mid b$

(2) حدد بدلالة n : $\Delta_n = (n^2+n) \wedge (n+2)$ (ناقض حسب روث)

(3) بين أن: $d_p \in \{2(2n+1); 2n+1\}$

(4) نأخذ: $n=6$ حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة: $ax+by=-26$

الجواب: (1) لدينا: $a = \overline{2310}^{(n)} = n+3n^2+2n^3$

$a = n(n+1)(2n+2)$

$b = \overline{252}^{(n)} = 2+5n+2n^2 = (n+2)(2n+1)$

ومنه: $(2n+1) \mid a$ و $(2n+1) \mid b$

(2) إذا كان: $n=2p$ زوجي $(n \in \mathbb{N})$

$$\Delta_n = 2p(2p+1) \wedge (2p+2) \quad \text{ومنه :}$$

$$\Delta_n = 2 [p(2p+1) \wedge (p+2)]$$

$$\begin{cases} p \wedge (p+2) = 1 \\ (2p+1) \wedge (p+2) = 1 \end{cases} \Rightarrow p(2p+1) \wedge (p+2) = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Delta_n = 2 \quad \text{وبالتالي :}$$

$$(p \in \mathbb{N}) \quad n = 2p+2 \quad \text{ن فردي}$$

$$\Delta_n = (2p+2)(2p+2) \wedge (2p+3) \quad \text{ومنه :}$$

$$\begin{cases} (2p+2) \wedge (2p+3) = 1 \\ (2p+2)(2p+2) \wedge (2p+3) = 1 \end{cases} \Rightarrow (2p+2)(2p+2) \wedge (2p+3) = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Delta_n = 2 \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\Delta_n = 2 \quad \text{لذا إذا كان } n \text{ زوجي فإن :}$$

$$\Delta_n = 1 \quad \text{لذا إذا كان } n \text{ فردي فإن :}$$

$$d_n = n(n+1)(2n+2) \wedge (n+2)(2n+2) \quad (3) \quad \text{لدينا :}$$

$$d_n = (2n+2) [n(n+1) \wedge (n+2)]$$

$$d_n = (2n+2) \cdot \Delta_n \quad \text{فإن :}$$

$$\Delta_n = 2(2n+1) \quad \text{ومنه :} \quad \Delta_n = 2 \quad \text{ن زوجي فإن :}$$

$$d_n = 2n+1 \quad \text{ومنه :} \quad \Delta_n = 1 \quad \text{ن فردي فإن :}$$

$$d_n \in \{2n+1; 2(2n+1)\} \quad \text{ومنه :}$$

$$(4) \quad \text{بأخذ : } n=6 \text{ زوجي ومنه : } d_6 = 2(2n+1) = 26$$

$$\text{ومنه المعادلة تصبح : } 22x + 4y = -2 \quad (1)$$

$$\text{لدينا : } (-2, 5) \text{ حلاً بدلياً ومنه : } 22(x+1) = -4(y-5)$$

$$\text{لأن : } 22 \mid -4(y-5) \quad \text{فإن : } 22 \mid 4 \quad \text{و } 22 \mid -4(y-5)$$

$$\text{أي : } 3k \in \mathbb{Z} : y-5 = 22k \quad \text{ومنه : } y = 5 + 22k$$

$$\text{ومنه : } x = -1 - 4k$$

$$\text{عكسياً لكل } k \in \mathbb{Z} \text{ حلاً للمعادلة (1) } (-1-4k; 5+22k)$$

$$\text{وبالتالي حلول المعادلة (1) هي : } S = \{ (-1-4k; 5+22k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

لتكن a و b و n أعداداً من \mathbb{N} بحيث $n \neq 0$.

(E) تعتبر المعادلة: $ax \equiv b \pmod{n}$: $x \in \mathbb{Z}$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E).

(a) بين أن: $S \neq \emptyset \iff a \wedge n \mid b$

(b) ليكن x_0 حل للمعادلة (E).

بين أن: $S = \left\{ x_0 + \frac{n}{a \wedge n} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

(c) تطبيقات: حل في \mathbb{Z} المعادلات التالية:

(E₁): $15x \equiv 10 \pmod{20}$: (E₂): $15x \equiv 10 \pmod{9}$ (E₃):

الجواب: (a) نبين أن: $S \neq \emptyset \iff a \wedge n \mid b$

(\Rightarrow) نفترض أن: $S \neq \emptyset$.

لذا: $\exists x_1 \in \mathbb{Z} : ax_1 \equiv b \pmod{n}$

أي: $\exists x_1 \in \mathbb{Z} \exists k \in \mathbb{Z} : ax_1 = b + kn$

نضع: $d = a \wedge n$

لذا: $d \mid kn \Rightarrow d \mid n \Rightarrow d \mid a$

ومنه: $d \mid ax_1 - kn$ أي: $d \mid b$

وبالتالي: $a \wedge n \mid b$

(\Leftarrow) نفترض أن: $a \wedge n \mid b$

نضع: $d = a \wedge n$

لذا: $\exists (u, p) \in \mathbb{Z}^2 : du + pn = d$

وبما أن: $d \mid b$ فإن: $\exists k \in \mathbb{N} : b = kd$

لذا: $\exists k \in \mathbb{N} : b = k(du + pn)$

$\exists k \in \mathbb{N} : b = kdu + kpn$

ومنه: $\exists k \in \mathbb{N} : b = kda \pmod{n}$

أي: $S \neq \emptyset$

وبالتالي: $S \neq \emptyset \iff a \wedge n \mid b$

(b) ليكن x_0 من S . نبين أن: $S = \left\{ x_0 + \frac{n}{a \wedge n} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

يكن $x \in S$ لدينا : $ax \equiv b \pmod{n}$ و $ax_0 \equiv b \pmod{n}$ ومنه : $a(x - x_0) \equiv 0 \pmod{n}$

أي : $\exists k \in \mathbb{Z} : a(x - x_0) = kn$

إذن : (*) $\frac{a}{a \wedge n} (x - x_0) = k \frac{n}{a \wedge n}$

بما أن : $\frac{a}{a \wedge n} (x - x_0)$ يقسم $\frac{n}{a \wedge n}$ و $\frac{a}{a \wedge n} \wedge \frac{n}{a \wedge n} = 1$

فإن : $\frac{n}{a \wedge n}$ يقسم $(x - x_0)$ (مضروب جبرهنة Gauss)

أي : $\exists k \in \mathbb{Z} : x - x_0 = k \frac{n}{a \wedge n}$

ومنه : $\exists k \in \mathbb{Z} : x = x_0 + \frac{n}{a \wedge n} k$

وبالتالي : $S \subset \{x_0 + \frac{n}{a \wedge n} k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

نبين أن : $\{x_0 + \frac{n}{a \wedge n} k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset S$

لدينا لكل k من \mathbb{Z} : $a(x_0 + \frac{n}{a \wedge n} k) = ax_0 + \frac{a}{a \wedge n} kn$

بما أن : $\frac{a}{a \wedge n} \in \mathbb{N}$ فإن : $a \wedge n \mid a$

ومنه : $a(x_0 + \frac{n}{a \wedge n} k) \equiv ax_0 \pmod{n}$

أي : $\equiv b \pmod{n}$ ($x_0 \in S$)

$x_0 + \frac{n}{a \wedge n} k \in S$

ومنه : $\{x_0 + \frac{n}{a \wedge n} k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset S$

وبالتالي : $S = \{x_0 + \frac{n}{a \wedge n} k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(3) لنحل في \mathbb{Z} المعادلة : $15x \equiv 10 \pmod{9}$ (E1)

بما أن : $15 \wedge 9 = 3$ و 3 لا تقسم 10 فإن مجموعة حلول المعادلة (E1)

هي : $S_1 = \emptyset$

لنحل في \mathbb{Z} المعادلة : $15x \equiv 10 \pmod{20}$ (E2)

بما أن : $15 \wedge 20 = 5$ و 5 لا تقسم 10 فإن مجموعة حلول المعادلة (E2)

غير فارغة. لدينا $x_0 = 3$ حلًا بدليًا للمعادلة (E2) ومنه مجموعة حلول

المعادلة (E2) هي : $S_2 = \{3 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

لتكن a و b و m أعداداً من \mathbb{N} بحيث : $m \neq 0$ و $n \neq 0$:
نعتبر النمطية التالية :
(5) $x \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$

لتكن S مجموعة حلول النمطية (5).

(1) بين أن : $S \neq \emptyset \iff m \wedge n \mid b - a$

(2) ليكن x_0 من S : بين أن : $S = \{x_0 + (m \wedge n)k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(3) تليقتان : حل في \mathbb{Z} للنمطيتين :

$$(S_1) : \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{25} \\ x \equiv 3 \pmod{20} \end{cases}$$

الجواب : (1) (\Rightarrow) نفترض أن $S \neq \emptyset$ ، وببين أن : $m \wedge n \mid b - a$

لدينا : $S \neq \emptyset \iff \exists x_1 \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x_1 \equiv a \pmod{m} \\ x_1 \equiv b \pmod{n} \end{cases}$

نضع : $d = m \wedge n$

لدينا : $a \equiv x_1 \pmod{m} \iff \exists k_1 \in \mathbb{Z} : a = x_1 + k_1 m$

$b \equiv x_1 \pmod{n} \iff \exists k_2 \in \mathbb{Z} : b = x_1 + k_2 n$

ومنه : $a - b = k_1 m - k_2 n$

وبما أن : $d \mid m$ و $d \mid n$ ، فإن : $d \mid k_1 m - k_2 n$

أي : $d \mid a - b$ أي : $m \wedge n \mid a - b$

(\Leftarrow) نفترض أن : $m \wedge n \mid b - a$ ، وببين أن : $S \neq \emptyset$

نضع : $d = m \wedge n$ ، إذن : $\exists (d, p) \in \mathbb{Z}^2 : dm + pn = d$

وبما أن : $m \wedge n \mid b - a$ ، فإن : $b - a = k(m \wedge n)$ $\exists k \in \mathbb{Z}$:

أي : $b - a = k(dm + pn)$ $\exists k \in \mathbb{Z}$:

ومنه : $b - kmd = a + knp$

نضع : $x_0 = b - kmd = a + knp$

إذن : $x_0 \equiv b \pmod{m}$ و $x_0 \equiv a \pmod{n}$

ومنه : $x_0 \in S$ ، إذن : $S \neq \emptyset$

$$S \neq \emptyset \Leftrightarrow man \mid b-a \quad \text{وبالتالي :}$$

$$x_0 \in S \text{ مع } S = \{x_0 + (mn)k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{نسب أن :}$$

$$A = \{x_0 + (mn)k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{نضع .}$$

$$\exists k \in \mathbb{Z} : x = x_0 + (mn)k \quad \text{ليكن } x \text{ من } A \text{ إذ :}$$

$$m \mid mn \quad \text{و} \quad n \mid mn \quad \text{لدينا :}$$

$$\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 : mn = k_1 m \quad \text{و} \quad mn = k_2 n \quad \text{إذن :}$$

$$x = x_0 + k_1 k m = x_0 + k_2 k n \quad \text{ومنه :}$$

$$x \equiv x_0 \pmod{m} \quad \text{و} \quad x \equiv x_0 \pmod{n} \quad \text{إذن :}$$

$$(x_0 \in S : \text{أي}) \quad x_0 \equiv b \pmod{m} \quad \text{و} \quad x_0 \equiv a \pmod{n} \quad \text{وبما أن :}$$

$$x \equiv b \pmod{m} \quad \text{و} \quad x \equiv a \pmod{n} \quad \text{فإن :}$$

$$x \in S$$

$$A \subset S \quad \text{وبالتالي :}$$

$$S \subset A \quad \text{عكس : ليس أن}$$

$$x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv a \pmod{n} \\ x \equiv b \pmod{m} \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$x_0 \equiv b \pmod{m} \quad \text{و} \quad x_0 \equiv a \pmod{n} \quad \text{ومنه :}$$

$$x - x_0 \equiv 0 \pmod{m} \quad \text{و} \quad x - x_0 \equiv 0 \pmod{n} \quad \text{إذن :}$$

$$m \mid x - x_0 \quad \text{و} \quad n \mid x - x_0 \quad \text{أي :}$$

$$mn \mid x - x_0 \quad \text{ومنه :}$$

$$\exists k \in \mathbb{Z} : x - x_0 = k(mn) \quad \text{إذن :}$$

$$\exists k \in \mathbb{Z} : x = x_0 + k(mn)$$

$$x \in A \quad \text{ومنه :}$$

$$S \subset A \quad \text{وبالتالي :}$$

$$S = A \quad \text{ومنه :}$$

$$(S_1) : \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{25} \\ x \equiv 3 \pmod{20} \end{cases} \quad \text{(3) نحل في النهاية التالية :}$$

لدينا: $n=25$ و $m=20$ و $a=5$ و $b=3$
 بمأذن: $man=5$ و $b-a=2$ و 5 لا تقسم 2

فإن مجموعة حلول النمطة (S_1) هي: $S_1 = \emptyset$

لتحلل 2 النمطة التالية: (S_2) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$

لدينا: $n=3$ و $m=2$ و $a=2$ و $b=1$

بمأذن: $man=1$ و $b-a=1$ و 1 يقسم 1

فإن مجموعة حلول المعادلة (S_2) : $S_2 \neq \emptyset$ ($mn=6$)

لدينا: $x_0=5$ حلًا بدئيًا، ومنه مجموعة حلول النمطة (S_2)

هي: $S_2 = \{ 5 + 6k \mid k \in \mathbb{Z} \}$

103 ليكن x عدد صحيح طبيعي بحيث $x > 2$: p و q عددين طبيعيين
 طبيعيين غير متعددين.

(1) بين أن: $(d/p) \Rightarrow [(x^d-1)/(x^p-1)]$

(2) $\sigma = p \wedge q$ ليكن

بين أن: $\exists (m,n) \in \mathbb{N}^2 : mp - nq = \sigma$

ب- استنتج أنه إذا كان $\sigma = p \wedge q$ فإنه يوجد $(m,n) \in \mathbb{N}^2$

بحيث: $(x^{mp}-1) - (x^{nq}-1)x^\sigma = x^\sigma - 1$

(3) بين أن: $(x^p-1) \wedge (x^q-1) = x^\sigma - 1$

(4) حدد: $(2^{15}-1) \wedge (2^{27}-1)$ و $(3^7-1) \wedge (3^{13}-1)$

الاجواب: (1) لدينا: $d \mid p \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : p = kd$

لدينا: $x^d \equiv 1 \pmod{x^d-1}$

إذن: $x^{kd} \equiv 1 \pmod{x^d-1}$

ومنه: $x^p - 1 \equiv 0 \pmod{x^d-1}$

أي: $x^d - 1 \mid x^p - 1$

(2) 1- نضع : $\sigma = p \wedge q$

نثبت أن : $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2 : mp - nq = \sigma$

لدينا : $\sigma = p \wedge q \Rightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 : \alpha p + \beta q = \sigma$

ولدينا : $\forall k \in \mathbb{Z} : \alpha p + k p q - k p q + \beta q = \sigma$

أي : $\forall k \in \mathbb{Z} : (\alpha + k q) p - (k p - \beta) q = \sigma$

نختار k من \mathbb{Z} بحيث : $k p - \beta \in \mathbb{N}$ و $\alpha + k q \in \mathbb{N}$

إذن : $k \geq \frac{\beta}{p}$ و $k \geq -\frac{\alpha}{q}$

لنأخذ : $k = \sup \left(\left[\frac{\beta}{p} \right] + 1, \left[-\frac{\alpha}{q} \right] + 1 \right)$

ومنه : $n = k p - \beta$ و $m = k q + \alpha$

إذن : $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2 : mp - nq = \sigma$

ب- لدينا : $x^{mp-1} - (x^{nq-1}) \cdot x^\sigma$

$$= x^{mp-1} - x^{nq+\sigma} + x^\sigma = x^{mp} - x^{nq+\sigma} + x^\sigma - 1$$

بما أن : $nq + \sigma = mp$ (حسب السؤال 2) 1- :

$$x^{mp} - 1 - (x^{nq-1}) x^\sigma = x^\sigma - 1$$

(3) نضع : $d_1 = x^\sigma - 1$ و $d_2 = (x^p - 1) \wedge (x^q - 1)$

لدينا : $d_1 | x^p - 1$ و $d_1 | x^q - 1$

ومنه : $d_1 | x^{mp} - 1$ و $d_1 | x^{nq} - 1$ (لأن : $(x^p - 1) | (x^{mp} - 1)$)

$$d_1 | (x^{mp} - 1) - (x^{nq} - 1) x^\sigma$$

أي : $d_1 | x^\sigma - 1$

ومنه : $d_1 | d_2$

لدينا : $d_2 = x^\sigma - 1$

حسب السؤال 2) لدينا :

$$\begin{cases} \sigma | p \\ \sigma | q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^\sigma - 1 | x^p - 1 \\ x^\sigma - 1 | x^q - 1 \end{cases}$$

ومنه : $d_2 | d_1$ ، أي : $x^\sigma - 1 | (x^p - 1) \wedge (x^q - 1)$

$$\begin{cases} d_2 | d_1 \\ d_1 | d_2 \\ d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow d_1 = d_2$$

$$(x^p - 1) \wedge (x^q - 1) = x^5 - 1 \quad \text{والتالي:}$$

$$(x^p - 1) \wedge (x^q - 1) = x^{pq} - 1 \quad \text{أي:}$$

$$(3^3 - 1) \wedge (3^{13} - 1) = 3^{3 \wedge 13} - 1 = 3 - 1 = 2 \quad (4) \text{ لدينا:}$$

$$(2^{15} - 1) \wedge (2^{27} - 1) = 2^{15 \wedge 27} - 1 = 2^3 - 1 = 7$$

104 ليكن p عدداً أولياً حيث: $p \geq 3$

(1) بين أن p يقسم C_p^n لكل $n \in [1, p-1]$

(2) نضع: $a_n = \frac{1}{p} C_p^n$ مع $1 \leq n \leq p-1$.

أ- بين أن p يقسم $na_n + (-1)^n$ لكل n حيث: $1 \leq n \leq p-1$

$$p(a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}) = 2^p - 2$$

(3) ليكن \bar{n} صنف تكافؤ n شرديد p و $(\bar{n})^2$ مقلوب \bar{n} في الجسم

$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x])$ حيث: $n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$

$$(1)^{-1} + (2)^{-1} + \dots + (p-1)^{-1} = 0 \quad \text{أ- بين أن:}$$

$$A = \frac{2^{p-1} - 1}{p} \quad \text{ب- نضع:}$$

$$\bar{A} = (\bar{2})^{-1} + (\bar{3})^{-1} + \dots + (\overline{p-2})^{-1} \quad \text{بين أن:}$$

الاجواب: (1) انظر التمرين رقم 51 (تمرين Format)

(2) نضع: $a_n = \frac{1}{p} C_p^n$ مع $1 \leq n \leq p-1$

أ- نبين أن: $p \mid na_n + (-1)^n \quad \forall n \in [1, p-1]$

$$\begin{aligned} na_n &= \frac{n}{p} C_p^n = \frac{n}{p} \cdot \frac{p!}{n!(p-n)!} \\ &= \frac{(p-1)!}{(n-1)!(p-n)!} \end{aligned} \quad \text{لدينا:}$$

$$(n-1)! na_n = (p-1)(p-2) \times \dots \times (p-(n-1)) \quad \text{ومنه:}$$

$$(n-1)! na_n \equiv (-1)^{n-1} (1 \times 2 \times \dots \times (n-1)) \pmod{p}$$

$$\equiv (-1)^{n-1} (n-1)! \pmod{p}$$

$$\equiv -(-1)^n (n-1)! \pmod{p}$$

$$(n-1)! (na_n + (-1)^n) \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{وهذه:}$$

$$p \mid (n-2)! (nan + (-2)^n) \quad \text{أي}$$

$$p \nmid 1 = p \nmid 2 = \dots = p \nmid (n-1) = 1 \quad \text{بما أن:}$$

$$p \nmid (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n(n-1)) = 1 \quad \text{فإن:}$$

$$p \nmid (n-2)! = 1 \quad \text{أي}$$

$$\text{بما أن: } p \mid (n-2)! (nan + (-2)^n) \quad \text{فإنه يجب مبرهنه}$$

$$p \mid nan + (-2)^n \quad \text{Gauss}$$

$$p(a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}) = 2^p - 1 \quad \text{ب. لنثبت أن:}$$

$$\text{لدينا: } p \nmid n = C_p^n \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{Z}_{p-1}$$

$$p a_1 + p a_2 + \dots + p a_{p-1} = C_p^1 + C_p^2 + \dots + C_p^{p-1} \quad \text{وهو:}$$

$$= C_p^0 + C_p^1 + \dots + C_p^p - C_p^0 - C_p^p$$

$$= (1+1)^p - 2 \quad (\text{لأن } C_p^0 = C_p^p = 1)$$

$$p(a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}) = 2^p - 2 \quad \text{وهو:}$$

$$(3) \text{ أي لدينا: } (x/pz + i, x) \quad \text{جسم } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ و } i \text{ جذر } p \text{ و } i^2 = -1$$

$$\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2 \Leftrightarrow (\bar{x}_1)^{-1} \neq (\bar{x}_2)^{-1} \quad \text{لدينا:}$$

$$\exists \bar{x}_2 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : (\bar{1})^{-1} = \bar{x}_2 \quad \text{وهو:}$$

$$\exists \bar{x}_2 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : (\bar{2})^{-1} = \bar{x}_2$$

...

$$\exists \bar{x}_{p-1} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : (\overline{p-2})^{-1} = \bar{x}_{p-1}$$

$$(\bar{1})^{-1} + (\bar{2})^{-1} + \dots + (\overline{p-2})^{-1} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_{p-1} \quad \text{و.ب.د}$$

$$= 0$$

$$(\overline{1+2+\dots+p-1})^{-1} = \overline{1+2+\dots+p-1} = \overline{p-1} = \overline{p-1} = 0 \quad \text{لأن:}$$

$$\text{ب. لدينا: } nan = (-2)^{n-1} [p] \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{Z}_{p-1}$$

$$\text{وهو: } \overline{a_n} = (\bar{n})^{-1} \cdot (\overline{-2})^{n-1} \quad \text{في } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_{p-1} = (\bar{1})^{-1} - (\bar{2})^{-1} + (\bar{3})^{-1} - \dots - (\overline{p-2})^{-1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} = (1)^{-2} + (3)^{-2} + \dots + (p-2)^{-2} - ((1)^{-2} + (3)^{-2} + \dots + (p-2)^{-2})$$

$$= 2((1)^{-2} + (3)^{-2} + \dots + (p-2)^{-2}) - ((1)^{-2} + (3)^{-2} + \dots + (p-2)^{-2})$$

$$(1)^{-2} + (3)^{-2} + \dots + (p-2)^{-2} = 0 \quad \text{وحسب السؤال (3)}$$

$$\text{فإن : } a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} = 2((1)^{-2} + (3)^{-2} + \dots + (p-2)^{-2})$$

$$\text{إذن : } 2A = 2((1)^{-2} + (3)^{-2} + \dots + (p-2)^{-2}) \quad (A = a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1})$$

$$\text{ومما أن : } (2/pZ, +, \cdot) \text{ جسم } 2 \neq 0 \quad (p \neq 2 = 1 \text{ لأن})$$

$$\text{فإن : } A = (1)^{-2} + (3)^{-2} + \dots + (p-2)^{-2}$$

105 (2) بين أن العدد 1999 أولي

$$(2) \text{ حل في } Z/1999Z \text{ المعادلة : } x^2 + 2001x - 3 = 0$$

الجواب : (1) لتبين أن 1999 عدد أولي (أنظر التمرين رقم 66)

$$(2) \text{ لنحل في } Z/1999Z \text{ المعادلة : } x^2 + 2001x - 3 = 0 \quad (E)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 - 4 = 0 \quad (\text{لأن : } 2001 = 2 \text{ في } Z/1999Z)$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2-2)(x+2+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ أو } x+4=0 \quad (\text{لأن : } 1999 \text{ أولي})$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ أو } x=-4=1996 \quad (Z/1999Z \text{ جسم})$$

$$\text{وبالتالي : } S = \{2, 1996\}$$

106 ليكن n من N صحيح $N = n! + 1$

$$(1) \text{ ايبين أن : } \forall k \in [1, n] \quad k \nmid N = 1$$

(2) استنتج أنه توجد ما لا نهاية من الأعداد الأولية.

الجواب : (1) ليكن k من N بحيث : $k \leq n$

$$\text{لدينا : } k \leq n \Rightarrow k \mid n!$$

$$\exists q \in \mathbb{N} : n! = kq \quad \text{لأن}$$

$$N - kq = 1 \quad \text{ومنه} : n! + 1 = kq + 1 \quad \text{أي} :$$

$$N \wedge = 1 \quad \text{وحسب مبرهنة Bezout فإن} :$$

(نفترض أنه يوجد عددان متتبعين من الأعداد الأولية p_1, p_2, \dots, p_n و

بحيث $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ ، وله لكل N_0 من \mathbb{N} يمكن كتابته

$$N_0 = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \dots \cdot p_n^{d_n} \quad \text{على شكل} :$$

$$d_i \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq i \leq n$$

$$\text{لنأخذ} : N_0 = p_n! + 1$$

حسب السؤال السابق $N_0 \wedge p_i = 1$ لكل $1 \leq i \leq n$ لأن $p_i \leq p_n$

$$\text{ومنه} : N_0 \wedge (p_1 p_2 \dots p_n) = 1$$

$$N_0 \wedge (p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_n^{d_n}) = 1 \quad \text{ومنه} :$$

$$\text{وبما أن} : N_0 = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_n^{d_n} \quad \text{فإن} : d_1 = d_2 = \dots = d_n = 0$$

$$\text{وبالتالي} , N_0 = 1 \quad \text{وهذا متناقض مع كون} N_0 = p_n! + 1 > 1$$

وبالتالي نوجد حلاً متباينة من الأعداد الأولية



ديما ديما لعبار ماشي هو

تمارين للبحث

1 (1) نعلم أن باقي القسمة الإقليدية لـ a على 12 هو 7 .
حدد باقي القسمة الإقليدية لـ a على 3 .

(2) نعلم أن باقي القسمة الإقليدية لـ b على 3 هو 2 .
حدد القسم الممكنة لباقي القسمة الإقليدية لـ b على 12 .

2 (1) حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد 37^n على العدد 7 .

(2) استنتج من ذلك باقي القسمة الإقليدية للعددين 37^{26} و 37^{250} على 7 .

(3) ما هو باقي القسمة الإقليدية على 11 للعدد $N = (705432)^5$ ؟

3 (1) حدد باقي "ـ" من الإقليدية للعدد 2^n على 3 . ($n \in \mathbb{N}$)

(2) حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد $(275423)^n$ على 3 .

(3) حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد $(372121)^n$ على 3 .

(4) حدد قسم العدد المخرج الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد

$$N = (275423)^n + (372121)^n$$
 قابل القسمة على 3 .

4 حدد حسب قسم العدد المخرج الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية

$$A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$$

للعدد

5 حدد الأعداد المخرجة الطبيعية n التي من أجلها يكون

$$A = n^2 - 3n + 6$$
 قابل للقسمة على 5 .

العدد

6 ليكن n من $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ نضع :

$$u_n = 5^{2^{n-2}} - 1$$

(1) يبين أن : $5^{2^k} + 1 \equiv 2 \pmod{2^k}$ $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$

(2) يبين أن :

$$2^2 \mid u_2$$

(3) يبين أن لكل n من \mathbb{N} حيث : $n \geq 3$:

$$u_n = 4 \prod_{k=0}^{n-3} (5^{2^k} + 1)$$

(4) استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$2^n \mid u_n$$

7 برهان على أن العدد $A = n^2(n^2 - 1)$ قابل للقسمة على 12 لكل $n \in \mathbb{N}$

(1) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 111 \mid 10^{6n} + 10^{3n} - 2$

(2) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 288 \mid 7^{2n+1} - 48n - 7$

9 حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث :

$$n^2 - 3n + 6 \equiv 0 \quad [5]$$

10 حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث :

$$n^3 - 3 \text{ يقسم } n - 3$$

11 حل المعادلات التالية

$$x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \quad 6x^2 + 4 = 0 \quad (1)$$

$$x \in \mathbb{Z} \quad 3x \equiv 1 \quad [5] \quad (2)$$

$$x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \quad 5x^2 + x - 4 = 0 \quad (3)$$

$$x \in \mathbb{Z} \quad 5x \equiv 2 \quad [7] \quad (4)$$

12 (1) حلل \mathbb{Z}^2 المعاد (1) : $6x - 13y = 5$

(2) استنتج حلول النظم : $\begin{cases} x \equiv 2 \quad [6] \\ y \equiv 7 \quad [13] \end{cases}$

13 (1) بين أن : $10^6 \equiv 1 \quad [7]$

(2) استنتج أن : $\sum_{k=1}^{10} 10^{10k} \equiv 5 \quad [7]$

14 (1) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $17x - 7y = 1$

(2) حل في \mathbb{Z} :

$$\begin{cases} x \equiv -2 \quad [7] \\ x \equiv 2 \quad [17] \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x \equiv 2 \quad [7] \\ x \equiv -2 \quad [17] \end{cases}$$

(3) حل في \mathbb{Z} المعادلة : $x^2 \equiv 4 \quad [119]$

15 ليكن n و k عددين طبيعيين طبيعيين غير متعددين.

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

نم : $F_n \wedge F_{n+k} = 1$

بين أن :

16 حل في \mathbb{N} المعادلة : $2^n - 1 \equiv 0 \pmod{3}$

17 (1) بين أن العدد 641 عدد أولي

(2) 1- بين أن : $5^4 \times 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$

ب- بين أن : $5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}$

(3) استنتج أن : 641 يقسم العدد $a = 2^{32} + 1$

18 صغ : $a = (1222)^{333} + (333)^{222}$

(1) أثبت أن : $222 \equiv 2 \pmod{5}$ و $333 \equiv 3 \pmod{5}$

(2) حدد أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يحقق :

$$3^n \equiv 1 \pmod{5} \quad \text{و} \quad 2^n \equiv 1 \pmod{5}$$

(3) استنتج أن العدد a يقبل القسمة على 5

19 (1) حدد باقي القسمة $a/7$ وليد a لكل من العددين 2^x و 3^x على 7

... \equiv ... $\pmod{7}$

(2) حل في \mathbb{N} المعادلة : $2^x + 3^x \equiv 0 \pmod{7}$

20 ليكن n عدد فردي من \mathbb{N} بحيث يوجد a و b من \mathbb{N}

$$n = a^2 + b^2$$

بحققان . بين أن : $n \equiv 1 \pmod{4}$

21 ليكن n من \mathbb{N} نضع : $F_n = 2^{2^n} + 1$

العدد F_n يسمى عدد Fermat

(1) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$: $F_n \equiv 7 \pmod{16}$

(2) بين أن : $2^n \equiv 2 \pmod{F_n}$

22 (1) سن أنه لكل a من \mathbb{Z} : $a^2 \equiv 0 \pmod{3}$ أو $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$

(2) استنتج من ذلك أن لكل (a, b) من \mathbb{Z}^2 :

$$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{و} \quad b \equiv 0 \pmod{3}$$

(3) بين باستعمال مما سبق أنه إذا وجد حلول (x, y, z) من \mathbb{Z}^3 بحيث :

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{فيكون :} \quad x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod{3}$$

23 لكن a و b و c أعداد من \mathbb{Z} بحيث : $9 \mid a^3 + b^3 + c^3$

(أ) بين أن : $3 \mid a$ أو $3 \mid b$ أو $3 \mid c$

(ب) بين التكافؤ التالي : $a \mid b \iff a^n \mid b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

24 حل في \mathbb{Z} النظم التالية :

$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{9} \\ x \equiv -3 \pmod{12} \end{cases}$$

25 (أ) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $3x - 5y = 6$

(ب) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ النظم التالية :

$$\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y = x^2 \end{cases} \pmod{5}$$

26 حل في $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ النظم التالية :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

27 (أ) ناقش حسب قسم الباقي a من $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ، حلول المعادلة :

$$ax = 0$$

(ب) حل في $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ المعادلة : $x^2 + 2x - 3 = 0$

28 عدد الأزواج (p, q) للأعداد الأولية الموجبة ، المختلفة

بحيث : p يقسم $q(q^2 - 9)$ و q يقسم $(p^2 + p)$

29 ليكن a و b عددين من \mathbb{N} بحيث : $0 < a < b$

نضع : $a = a_1 b_1$ و $b = a_2 b_2$

حدد مجموعة الأزواج (a, b) بحيث : $m - a = 77$

30 (أ) بين أنه إذا كان : $a' \wedge b' = 1$ فإن : $(a' + b') \wedge a' b' = 1$

(ب) حدد مجموعة الأزواج (a, b) من \mathbb{N}^2 بحيث :

$$5(a+b)^2 = 147(a_1 b_1)^2$$

31 تخبر في \mathbb{Z} المعادلة : $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$ (أ)

(أ) بين أن المعادلة (أ) تكافئ :

$$(2x+3)^2 = (2y^2)^2 + 5$$

(ب) نضع : $\alpha = 2x+3$ و $p = 2y^2$

حل المعادلة (أ)

32

(1) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلات التالية :

$$17x - 19y = -2 \quad \text{ب-} \quad 17x - 19y = 2 \quad \text{أ-}$$

(2) حدد الأعداد n من \mathbb{Z} التي تحقق :

$$\begin{cases} n \equiv -2 \pmod{17} \\ n \equiv 0 \pmod{19} \end{cases} \quad \text{ب-} \quad \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{17} \\ n \equiv -2 \pmod{19} \end{cases} \quad \text{أ-}$$

(3) استنتج مما سبق مجموعة الأعداد n من \mathbb{Z} بحيث :

$$n^2 + 2n \equiv 0 \pmod{323}$$

33

(1) حل في $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ النظمة :

$$\begin{cases} 3x + 6y = 4 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

(2) أوجد جميع الأزواج (a, b) من \mathbb{Z}^2 بحيث تكون الأعداد

$$4a - 6b, \quad 2a - 3b, \quad 3a - 5b$$

كل حل ، ماهو باقي القسمة الأفقية لـ $a+b$ على 8 .(3) استنتج شرط لازم وكاف لكي يكون زوج أعداد a و b فردية حلاً للسؤال (2) .

34

ليكن n عدد صحيح طبيعي بحيث $n > 1$ نعبر المجموعة $S_n = \{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid x^2 + 1 = 0\}$ (1) أ- يبين أن لكل n ($n > 2$) العناصر 1 و -1 لا تنتمي إلى S_n ب- يبين أنه إذا كان : $x \in S_n$ و $y \in S_n$ فإن : $(x+y)(x-y) = 0$ ج- يبين أنه إذا كان : $x \in S_n$ فإن : $-x \in S_n$ د- يبين أنه إذا كان n عدد أولي فإن : S_n فارغة أو S_n تقلل عنصرتين مختلفتين .(2) حل المعادلة : $x^2 + 1 = 0$ في كل حالة من الحالات الآتية :

$$n=3 \quad \text{أ-} \quad n=6 \quad \text{ب-} \quad n=7 \quad \text{ج-}$$

35

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) $4x^2 - 9y^2 = 432$ (1) أ- يبين أنه إذا كان (x, y) حلاً للمعادلة (E) فإن العدد 3 يقسم x والعدد 2 يقسم y .ب- يبين أنه إذا كان (x, y) حلاً للمعادلة : $x^2 - y^2 = 12$ فإن : $(3x, 2y)$ حلاً للمعادلة (E)(2) أ- حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $x^2 - y^2 = 12$ ب- استنتج حلول المعادلة (E)

36

تعتبر الأعداد التالية 2, 3, 5, 7, 11

ولكن p من \mathbb{N} حسب $p \geq 13$ و p عدد أولي.

(1) س أن الأعداد 2, 3, 5, 7, 11 لا يمكن كتابتها على شكل مجموع عددين غير أوليين.

(2) عدد جميع الأعداد الأولية p التي يكتب على شكل مجموع عددين غير أوليين. (لاحظ أن: $p = 9 + (p-9)$).

37

(1) ليكن n عددًا طبيعيًابين أن عددًا واحدًا فقط من بين الأعداد: n , $n+10$ و $n+20$ يكون قابلاً للقسمة على 3.(2) استنتج أنه يوجد m وحيد من \mathbb{N} يتم تحديده بحيث تكون الأعداد:

$$p, p+10, p+20$$
 كلها أولية

(3) 9- بين أنه كل m و n من \mathbb{Z}

$$m \equiv 1 \pmod{3} \iff m \equiv 2 \pmod{3} \iff m \equiv 0 \pmod{3}$$

ب- انتسج في \mathbb{Z}^3 حلول المعادلة: $3x + 4y + 2z = 0$

38

بين أنه إذا كان a, b, c تكون الأعداد

$$x = abc, y = ab+ac+bc, z = a+b+c$$

أولية فيما بينها.

39

ليكن n من \mathbb{N} نضع

$$d_n = (n+1) \wedge 2$$

(1) بين أن d_n (2) ما هي القيم الممكنة للعدد d_n ؟

(3) نضع:

$$A_n = \frac{n^2 + 1}{n+1}$$

أ- حدد الأعداد التي من أجلها يكون A_n عددًا طبيعيًا: $A_n \in \mathbb{N}$ ب- حدد الأعداد n التي من أجلها يكون A_n جبر قابل للاختزال.ج- بين أن A_n عددًا عشويًا إذا وفقط إذا وجد عددين

$$p \text{ و } q \text{ من } \mathbb{N} \text{ بحيث: } n = 2^p \cdot 5^q - 1$$

40 (1) بين أنه إذا كان: $a'b' = 1$ فإن: $(a'+b') \wedge a'b' = 1$

عاجده الزوج (a, b) من N^* بحيث: $5(a+b)^2 = 147(avb)$

41 ليكن n من N بحيث: $n \geq 2$

كل عدد صحيح طبيعي غير معدوم p نضع: $I_p = \{x \in \mathbb{Z} \mid px \equiv 0 \pmod{n}\}$

(1) حدد I_2, I_3, I_4, I_6 إذا كان: $n=6$.

عاجد 1- بين أن: $n\mathbb{Z} \subset I_p$

عاجد 2- حدد I_p إذا كان: $np=1$.

عاجد 3- نضع: $d=np$ بحيث: $d \neq 1$

اثبت أن: $I_p \subset I_d$ ثم استنتج أن: $I_p = I_d$

(2) ليكن p, q من N^* بحيث: $n=pq$ و $paq=1$

عاجد 1- اثبت أن: $I_p \cap I_q = n\mathbb{Z}$

عاجد 2- اثبت أن: $I_p + I_q = \mathbb{Z}$

42 ليكن f في $N^* \times N^*$ المعادلة: $(E) x^2 + y^2 + xy - 13x = 0$

نضع: $x=ad, y=bd, d=x \wedge y$

(1) بين أن: $a \mid d$

عاجد نضع: $d=ac$ حيث $c \in N^*$

بين أن: $c(a^2 + ab + b^2) = 13$

(2) استنتج أن: $c=1$

(3) حل في $N^* \times N^*$ المعادلة (E).

43 ليكن p عدد أولي (الأسئلة الثلاثة 1, 2, 3) غير متصلة فيما بينها).

(1) أ- نفترض أن $p \geq 5$.

بين أن: (1) $p^2 \equiv 1 \pmod{p}$ و أن: (2) $2^p \equiv 2 \pmod{p}$ ثم استنتج أن العدد

$2^p + 2^p$ ليس أولي.

عاجد 2- بين أنه إذا كان العدد $2^p + 2^p$ أوليًا فإن: $p=3$

عاجد 3- بين أنه إذا كان p يقسم $2^p + 1$ فإن: $p=3$

(3) أ- تحقق من أن: $(2x^2 + x)^2 < 4(2+x+x^2+x^3+x^4) < (2x^2 + x+2)^2 \forall x \in N^*$

عاجد 2- بين أنه إذا كان مجموع نواسم العدد p^4 مربعًا كاملًا فإن: $p=3$.

44

لنكن a, b, c من \mathbb{Z} بحيث:

$$a^2 \neq b^2$$

(1) أثبت أنه إذا كان $c \wedge 2 = 1$ فإن:

$$[c | a+b \text{ و } c | a-b] \Rightarrow [c | a \text{ و } c | b]$$

(2) استنتج أنه إذا كان a و b عدديين مختلفين فإن:

$$a \wedge b = 1 \Rightarrow (a-b) \wedge (a+b) = 1$$

(3) حل في \mathbb{N}^2 النمطة التالية:

$$\begin{cases} x^2 y = 3^5 \times 5^{13} \\ x \wedge y = 1 \\ 1 < x < y \end{cases}$$

(4) استنتج حلول النمطة التالية:

$$(x, y) \in \mathbb{N}^2 : \begin{cases} x^2 y^2 = 3^5 \times 5^{13} \\ x \wedge y = 1 \end{cases}$$

45

لنكن x, y, z من \mathbb{N}^* بحيث:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

(1) حدد x و y إذا كان $z = 1$.(2) نفترض أن $z \neq 1$ و $x \wedge y \wedge z = 1$ و $z \neq 1$.(أ) بين أن: $(y-z) \wedge (x-z) = 1$ و $(y-z) \wedge (x-z) = 1$ و $(y-z) \wedge (x-z) = 1$.(ب) استنتج أنه يوجد عنصران a و b من $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ بحيث:

$$z = ab \text{ و } x-z = a^2 \text{ و } y-z = b^2 \text{ و } a \wedge b = 1$$

(3) بين أنه توجد أعداد صحيحة طبيعية α, p و d بحيث:

$$x = \alpha(d+p)d \text{ و } y = p(d+p)d \text{ و } z = d \wedge p = 1 \text{ و } \alpha \wedge p = 1$$

(4) حل في \mathbb{N}^4 المعادلة:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}$$

46

(1) لنكن x, y, z أعداد صحيحة طبيعية.برهن على أنه إذا كان $(x \wedge y = 1 \text{ و } x \wedge z = 1)$ فإن: $x \wedge yz = 1$.(2) ليكن p, q عددين صحيحين طبيعيين و n باقي القسمة الإقليدية للعدد p على العدد q .برهن على أن: $p \wedge q = q \wedge n$.(3) ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث: $a \wedge b = 1$ و $2 < b < a$.

47 لكن : $E = \{b' \in \mathbb{N} / b' < b \text{ و } b' \wedge b = 1\}$

$$F = \{ab' / b' \in E\}$$

1- ليكن α عنصراً من F ، أثبت أن : $\alpha \wedge b = 1$

ب- ليكن α و β عنصريين من F بحيث : $\alpha \neq \beta$

α و β برمر لهما قسمه α على b و β برمر لهما قسمه β على b

أثبت أن : $\alpha \neq \beta$ و $\alpha \wedge b = 1$ و $\beta \wedge b = 1$ و $\alpha \wedge \beta = 1$

ج- ليكن $\pi(F)$ جداء جميع عناصر المجموعة F .

و $\pi(E)$ جداء جميع عناصر المجموعة E .

أثبت أن : $\pi(F) = \pi(E)$ [ب]

48 1) 1- ليكن x عدداً صحيحاً طبيعياً لا يقبل القسمة على 7

يب أن أحد الأعداد الصحيحة $x^2 - 1$ ، $x^2 - 2$ ، $x^2 - 4$ يقبل القسمة على 7

ب- استسج أنه إذا كان m و n عددين صحيحين طبيعيين لا يقبلان القسمة

على 7 بحيث يكون $(m^2 + n^2)$ مربعاً كاملاً فإن $(m^2 \cdot n^2)$ يقبل القسمة على 7

ج- عثر عددين صحيحين طبيعيين m و n أو ليس فيما بينهما بحيث

$m > n$ و $(m-n)$ فردي و $(m^2 + n^2)$ مربع كامل

نفع : $x_0^2 = m^2 - n^2$ و $y_0 = 2mn$ و $z_0^2 = m^2 + n^2$

أ- يب أن : (x_0, y_0, z_0) حل للمعادلة : $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x \wedge y = 1 \end{cases}$

ب- نفترض أن y_0 لا يقبل القسمة على 7 نتحقق من أن m و n لا يقبلان

القسمة على 7 و استسج أن x_0 يقبل القسمة على 7 .

3) أثبت الخاصية التالية : إذا كانت x و y و z أعداداً صحيحة

طبيعية بحيث : $x^2 + y^2 = z^2$ و $x \wedge y = 1$

فإن الجداء xy يقبل القسمة على 7 .

49 ليكن m عدد صحيح طبيعي أكبر قطعاً من 1 و p عدد أولي موجب

1) 1- يب أنه إذا كان $\begin{cases} p \wedge x = 1 \\ p \wedge y = 1 \end{cases}$ فإن : $p \wedge xy = 1$

ب - استنتج أنه إذا كان $p > a$ فإن $p \wedge (a!) = 1$

ج - ما هي الأعداد الأولية التي تقسم $(a!)$ ؟

د - نعرض في هذا السؤال أن $p \leq a$ و p يد بحديد أكبر عدد a بحيث p^v يقسم $(a!)$.

أ - من أن عوامل $(a!)$ التي تعبر القسمة على p هي :

1. a : حيث q هو خارج القسمة الأليديه لـ a على p .

ب - تعبر عن أن جداء هذه العوامل هو $p^q = (q!)^p$ وأن : $\lambda | (a!)$

ج - تحقق أنه إذا كان $p > q$ فإن $a = q$ ثم أنه إذا كان

$p \leq q$ ، كان q_1 هو خارج القسمة الأليديه لـ q على p فإن :

$p^{q_1+q_2}$ يقسم $(a!)$.

د - نأخذ : $a = 423$ ، $p = 7$

سأطرح نتائج السؤال (د) عدة مرات حدد أكبر عدد a بحيث

7^v يقسم $(423!)$.

50

لتكن $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ أعداد صحيحة طبيعية غير معدة

بحيث : $x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = M$

مع : $dx = \text{pgcd}(x_1, x_2, x_3)$ و $dy = \text{pgcd}(y_1, y_2, y_3)$

$mx = \text{ppcm}(x_1, x_2, x_3)$ و $my = \text{ppcm}(y_1, y_2, y_3)$

حيث : pgcd هو القاسم المشترك الأكبر ، و ppcm هو اللغاطع المشترك الأصغر

(1) من أن M مضاعف لكل من الأعداد dx ، dy ، mx ، و my .

(2) نضع : $M = dx \cdot M'$

أ - من أنه توجد أعداد صحيحة طبيعية x'_1, x'_2, x'_3 و y'_1, y'_2, y'_3 فيما بينها

وتحقق : $M' = x'_1 y'_1 = x'_2 y'_2 = x'_3 y'_3$

ب - استنتج أن M' مضاعف للعدد my .

(3) نضع : $M' = M'' \cdot my$ ، لتكن z_1, z_2, z_3 الأعداد الصحيحة الطبيعية

بحيث : $my = z_1 y'_1 = z_2 y'_2 = z_3 y'_3$

أ- من أ. $m = dx \cdot my$ ، u^1 ، $m'' = 1$.
 ب- برهن على أن $dx = \frac{x_1 x_2 x_3}{pgcd(x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3)}$

$mx = \frac{x_1 x_2 x_3}{pgcd(x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3)}$

(نأخذ : $y_3 = x_1 x_2$ ؛ $y_2 = x_1 x_3$ ؛ $y_1 = x_2 x_3$)

51 لنك a, b عددين صحيحين طبيعيين بحيث $0 < b < a$ و a قابل القسمة على a .

(أ) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

نضع : $a = da_1$ و $b = db_1$

أ- من أن العددين a_1 و b_1 أوليان فيما سيعا

ب- بين أن العدد a_1 يقسم العدد d ، أن العدد a_1 يقسم العدد a

(ع) نكتب العدد a على شكل $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ حيث الأعداد p_i أولية وحاصلها الأعداد a_i ($1 \leq i \leq n$) أعداد صحيحة موجبة غير معدة.

أ- بين أنه لكل a من المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ العدد p_i يقسم العدد a

ب- بين أن العدد a يكتب على شكل $a = (p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}) \cdot c$

حيث p_i ($1 \leq i \leq n$) أعداد صحيحة طبيعية تحقق : $2p_i \geq a_i$ والعددين a و c أوليان فيما بينهما.

52 (أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي a ، وكل عدد صحيح فردي m لدينا : $a^m + 1$ يقسم $a + 1$.

(ب) ليكن q عدد أولي ، a عدد صحيحاً طبيعياً .

أ- بين أن : $(a+1)^q \equiv a^q + 1 \pmod{q}$

ب- استنتج أن : $a^q \equiv a \pmod{q}$

(ج) لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر فلها من 2 : نضع : $a_n = (n!)^2 + 1$

- أ- بين أن n عدد فردي .
 ب- بين أن n يقبل قاسماً أولياً فردياً p أكبر قطعاً من n .
 ج- نفترض أن العدد p يكتب على الشكل $p = 4k + 3$ حيث $k \in \mathbb{N}$.
 بين أن n يقسم العدد $(n!)^{2(2k+1)} + 1$
 وأن العدد p يقسم العدد $(n!)^p + n!$
 د- استنتج أن العدد p لا يمكن أن يكتب على الشكل $p = 4k + 3$ حيث $k \in \mathbb{N}$.
 هـ استنتج من كل مما سبق أن المتتالية $(4n+1)_{n \in \mathbb{N}}$ بعنوي على ما
 لإنفاية من الأعداد الأولية .

53

ليكن p عدد أولي و n عدداً $n \in \mathbb{N}$. نرمز لـ $f_p(n)$ لأكثر عدد صحيح طبيعي n بحيث n يقبل القسمة على p^k ونرمز لـ $[x]$ للجزء الصحيح للعدد x .

(1) نفترض أن $p \leq n$ و $n \geq 1$. بين أن لكل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$\frac{n!}{p^{k+1}} \leq n \Rightarrow \left[\frac{n!}{p^{k+1}} \right] = \left[\frac{n!}{p^{k+1}} \right]$$

(2) نفترض أن $n \geq \left[\frac{n!}{p} \right]$

$$f_p(n!) = n + f_p(n!)$$

(3) بين أن $f_p(n!) = \left[\frac{n!}{p} \right] + \left[\frac{n!}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{n!}{p^k} \right]$

حيث s هو أكبر عدد صحيح طبيعي λ بحيث $p^\lambda \leq n$.

(4) استنتج أن العدد $(1000)!$ ينتهي بـ 249 صفراً.

54

نعبر عن المتتالية العددية (u_n) المعروفة بما يلي:

$$u_0 = 0 \quad \text{و} \quad u_1 = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

بين أنه لكل n من \mathbb{N} :

$$2 \mid u_n \Leftrightarrow 3 \mid n \quad (1)$$

$$3 \mid u_n \Leftrightarrow 4 \mid n \quad (2)$$

$$4 \mid u_n \Leftrightarrow 6 \mid n \quad (3)$$

55

(1) ليكن a و b و k أعداد صحيحة نسبية حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$ أثبت أن : $a \wedge b = b \wedge (a - bk)$ (2) ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً حيث : $n \geq 4$ نضع : $A = n^2 - n - 10$ و $B = n + 4$ 1- بين أن : $A \wedge B = B \wedge 10$ ب- حدد قيم n التي من أجلها B قاسم لعدد A ج- نضع : $A' = \frac{A}{A \wedge B}$ و $B' = \frac{B}{A \wedge B}$ (3) بين أن : $[A \wedge B = 5 \text{ و } A \vee B = 300] \Leftrightarrow [A' \vee B' = 60 \text{ و } A' \wedge B' = 60]$ (4) استنتج العدد n الذي يكون من أجله : $A \wedge B = 5$ و $A \vee B = 300$

56

ليكن a و b عدداً من \mathbb{N} بحيث : $a \wedge b = 1$ و $a \geq 2$ و $b \geq 2$ وليكن x من \mathbb{Z} بحيث : $x \geq ab$ نعتبر التطبيق φ المعرفة بـ : $\varphi : [0, b-1] \rightarrow [0, b-1]$
 $k \mapsto rk$ حيث : r_k هو باقي القسمة الإكيدة للعدد $x - ka - b$ على b و : $[0, b-1] = \{0, 1, \dots, b-1\}$ 1- بين أن φ تقابل(2) استنتج من ذلك أنه : $\exists (u, v) \in \mathbb{N}^2 : x = au + bv$ (3) نفترض أن : $x > ab - a - b$ بين أنه : $\exists (u', v') \in \mathbb{N}^2 : x = au' + bv'$ (4) بين أن النتيجة خاطئة إذا كان : $x = ab - a - b$ (استعمل مبرهنة كوش)

57

ليكن m عدداً أولياً موجب . نعتبر المجموعة $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, m-1\}$ (1) ليكن $0 < x < m$. بين أن x قاسم للصفر إذا وفقط إذا كان m يقسم x ب- حدد قواسم الصفر في $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (2) حدد قواسم الصفر في $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (3) حدد مجموعة الأعداد n من \mathbb{N} بحيث : $(2n+5)(n+4)$ يقبل القسمة على 3تعريف : نقول إن \bar{x} قاسم للصفر في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ إذا وجد \bar{y} من $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ بحيث :

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{0} \quad \text{و} \quad \bar{y} \neq \bar{0} \quad (\bar{x}, \bar{y}) \neq (\bar{0}, \bar{0})$$

58 ليكن (x, y) عنصر من \mathbb{Z}^2 بحيث : $x + y^2 = y^3$

(1) افترض أن : $xy \neq 0$

أ- بين أن y يقسم x

ب- نفع : $x = dy$: أثبت أن y يقسم d .

ج- استنتج أنه يوجد d من \mathbb{Z}^* بحيث : $x = d(d+1)^2$ و $y = d+1$

(2) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $x + y^2 = y^3$

59 لتكن a, b, c أعداد صحيحة طبيعية غير صفرية .

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

60 ليكن a, b, c من \mathbb{Z}^* ، بين الاستلزام التالي :

$$c | ab \Rightarrow c | (a \wedge c) \times (b \wedge c)$$

61 ليكن a, m عددين صحيحين طبيعيين أكبر من 1 .

بين أنه إذا كان q خارج القسمة الإقليدية لـ a^m على $a-1$

$$q \wedge (a-1) = m \wedge (a-1)$$

62 نفع . $a_n = 15n^2 + 8n + 6$ و $b_n = 30n^2 + 21n + 13$

جب . $n \in \mathbb{N}$

(1) أحسب . $b_n - 2a_n$

(2) استنتج أن : $a_n \wedge b_n = 1$

63 حل في \mathbb{N}^2 النظام :
$$\begin{cases} x \wedge y = 60 \\ x \vee y = 360 \end{cases}$$

64 حدد الثوابت $\{a, b\}$ من $\mathbb{Z}(n)$ بحيث :

$$2(a \vee b) + 7(a \wedge b) = 11$$

65 ليكن (a, b) من \mathbb{Z}^2

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b) \wedge ab = 1$$

(1) بين أن :

(2) استنتج أنه لكل x, y من \mathbb{Z}^* لدينا : $(x+y) \wedge (x \vee y) = x \wedge y$

(3) حل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ النظام التالية :
$$\begin{cases} x+y = 276 \\ x \vee y = 2440 \\ x < y \end{cases}$$

(1) حدد مجموعة القواسم الموجبة للعدد 210 .

66

(2) ليكن x و y من N^* . نضع : $d = x \wedge y$ و $m = x \vee y$

حدد الأزواج (x, y) من $N^* \times N^*$ التي تحقق :

$$\begin{cases} m = 210d \\ y - x = d \end{cases}$$

ليكن a و b من N^* بحيث : $m = a \vee b$

67

(1) بين أن : $(a+b) \wedge m = a \wedge b$

(2) حل في $N^* \times N^*$ النظم التالية :

$$\begin{cases} a+b=60 \\ a \vee b = 72 \end{cases}$$

ليكن a و b من N^* بحيث : $d = a \wedge b$ و $m = a \vee b$

68

حدد الأزواج (a, b) من $N^* \times N^*$ بحيث :

$$a \nmid b \quad 0 < a < b \quad 5 \quad 2m + 3d = 78$$

ليكن a و b من N^* بحيث : $d = a \wedge b$ و $m = a \vee b$

69

حدد الأعداد a و b بحيث :

$$\begin{cases} a \leq b \\ a+b=105 \\ m \nmid d \end{cases}$$

(1) حدد مجموعة القواسم الموجبة للعدد 5929 .

70

(2) حدد الأزواج (a, b) من N^2 بحيث : $d = a \wedge b$ و $m = a \vee b$

$$x^4 - 91x + 588 = 0 \quad \text{تكون حلولاً للمعادلة :}$$

ليكن n من Z ، نعتبر العددين : $A = 3n+4$ و $B = 9n-9$

71

(1) أوجد قيمة العدد $A \wedge B$ حسب قيم n .

(2) أوجد الأعداد n بحيث يكون لدينا : $A \wedge B = 27$ و $A \vee B = 84$

(1) حل في Z^2 المعادلة : $90(x-3) = 36(2-y)$

72

(2) استنتج مجموعة الأزواج (x, y) من Z^2 بحيث : $90(x-3) = 36(2-y)$

$$\begin{cases} x, y \geq -15 \end{cases}$$

لك a و b و c و d حدود صحيحة طبيعية لمتتالية هندسية

73

أساسها q ، حيث : a عدد أولي .

$$10a^2 = d - b \quad \text{حدد هذه الأعداد بحيث :}$$

74 (1) ليكن m عدد أولي موجب ، حدد الأعداد الصحيحة النسبية α

بحيث : $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$

واستنتج حلول المعادلة : $x \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} : x^2 = 0$

(2) حل في $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ المعادلة : $x^2 + 16x + 15 = 0$

75 (1) أكتب العدد 319 على شكل جداء عوامل أولية

(2) بين أنه إذا كان x و y أوليان فيما بينهما فإن العددين :

$3x+5y$ و $x+4y$ هما أيضا أوليان فيما بينهما.

(3) حل في \mathbb{N}^2 النظمة :
$$\begin{cases} (3a+5b)(2a+b) = 1276 \\ ab = 2(4vb) \end{cases}$$

76 (1) ليكن a و b من \mathbb{N}^* بحيث $a+b=23$

1- بين أن : $ab=1$

2- استنتج a و b بحيث : $a < b$ و $ab=126$

(3) حل في \mathbb{Z}^4 المعادلة : $9u - 14v = 1$

$x=4 \pmod{9}$

$x=5 \pmod{14}$

(3) بتغير المجموعة (5) للأعداد x من \mathbb{Z} بحيث :

بين أن عناصر المجموعة (5) توافق نفس العدد سرديدي 126

77 ليكن a و b و β من \mathbb{Z} بحيث : $a = \alpha b + \beta$

1- بين أن : $ab = b\alpha\beta$

2- نضع $d_1 = \alpha b$ و $d_2 = (19a \wedge 9b) \wedge (5a+4b)$

حدد d_1 بدلالة d_2

(3) حدد $(9n+4) \wedge (2n-1)$ بحيث : $n \in \mathbb{Z}$

(سأكتب حسب قيم n)

78 (1) 1- حدد الأعداد x من \mathbb{Z} بحيث $3x \equiv 23 \pmod{7}$

2- استنتج مجموعة الأزواج (x,y) من \mathbb{Z}^2 بحيث : $3x - 7y = 23$

(2) 1- ليكن k عنصرا من \mathbb{Z} بحيث $k \neq -7$

بين أن : $(3+7k) \wedge (-2+3k) = (k+7) \wedge 23$

2- استنتج الأزواج (x,y) من \mathbb{Z}^2 التي تحقق :

$3x - 7y = 23$ و $x \wedge y = 1$

ليكن x, y من \mathbb{N} ، تعتبر المعادلة: $403x - 68y = 17$ (1)

79

(1) بين أنه إذا كان (x, y) حلاً للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 17

(2) حدد الحل (x_0, y_0) للمعادلة (1) بحيث: $0 < x_0 < 30$

و استنتج حلول المعادلة (1)

(3) ليكن (x, y) حلاً للمعادلة (1)

أ- بين أن خارج القسمة الإقليدية للعدد y على x غير منقسم بـ 17

ب- بين أن $x \wedge y = 17$ ، وإذا وفقط إذا كان باقي القسمة الإقليدية لـ

y على x مضاعف للعدد 17.

(1) ليكن A و B من \mathbb{N}^* بحيث: $AB = 2$

80

نضع: $B = ab$ 3 $A = a^2 + ab + b^2$

بين أن A و B لا يقبلان قاسماً أولياً مشتركاً

(2) استنتج أن: $AB = 2$

(3) بين أنه لكل x, y من \mathbb{N}^* : $(x^2 + xy + y^2) \wedge xy = (x \wedge y)^2$

ليكن n من \mathbb{Z} نضع: $A = n^2 - 3n + 6$ 3 $B = n - 1$

81

(1) بين أن: $AB = B \wedge A$

ب- حدد حسب قيم n العدد $A \wedge B$.

(2) ما هي قيم n التي من أجلها يكون العدد $\frac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ يقسمي إلى \mathbb{Z} ؟

لكن (a_n) و (b_n) متساويتان عدديتان معرفتان بمائلي:

82

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$$

(1) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \in \mathbb{N} \text{ و } b_n \in \mathbb{N}$

(2) حدد a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n

(3) بين أن: $a_{n+1} \wedge b_{n+1} = a_n \wedge b_n$

(4) استنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \wedge b_n = 1$

تعتبر \mathbb{N}^2 المعادلة: $x^2 - y^2 = 1616$ (1)

83

(2) بين أن: $x + y$ و $x - y$ قاسمان زوجيان للعدد 1616

(3) حدد القواسم الزوجية للعدد 1616

(4) حل المعادلة (1)

84 ليكن n عدد صحيح طبيعي غير معدم

- (1) بين أنه لكل m من \mathbb{N} العدد $(2m+1)^n - 1$ يقبل القسمة على m
 (2) استنتج أن العدد $20 - 21^n - 22^{n+2}$ يقبل القسمة على 100 لكل n من \mathbb{N}^* .

85 بعين المجموعة: $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 2^x - 3^y = 1\}$

- (1) بين أن: $(2, 1) \in S$ و $(1, 0) \in S$
 (2) ليكن (x, y) من \mathbb{N}^2 بحيث: $\{(2, 0); (1, 1)\} \subset S$
 نفترض أن: $x \geq 0$ و $y \geq 2$
 أ- بين أن: $(x, y) \in S \Rightarrow 2^x \equiv 1 \pmod{9}$
 ب- بين أن: $2^x \equiv 1 \pmod{9} \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{6}$
 ج استنتج أن: $S = \{(2, 1); (1, 0)\}$

86 ليكن a من \mathbb{N} نضع: $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4$

- نفرض أن A مربع كامل أي: $A = n^2$ $3n \in \mathbb{N}$
 (1) بين أن: $n = a^2 + b^2$ $\exists b \in \mathbb{N}$
 (2) بين أن: $a \leq 2b - 1$
 (3) استنتج أن: $b \leq 2$
 (4) بين أن: $b = 2$
 (5) استنتج أن: A مربع كامل $\Leftrightarrow a = 3$

87 ليكن n من \mathbb{N}^* نضع: $S_n = \sum_{p=1}^n p^3$

- (1) أحسب: $S_{n+1} \wedge S_n$
 (2) بين أن: $S_{n+1} \wedge S_{n+1} \wedge S_n = 1$

88 (1) ليكن n من \mathbb{N} نضع: $p = n^4 + 4$

حدد n لكي يكون p عدداً أولياً.

- (2) ليكن n و m عددين طبيعيين بحيث: $n = m + 2$

نضع: $p = m^4 + 4$ و $q = n^4 + 4$
 برهن على أن p و q ليسا أوليان فيما بينهما.

89

نعتبر المتتالية (u_n) بحيث :

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 2 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n-1} \quad ; n \geq 2 \end{cases}$$

(1) بين أن : $\forall n \geq 2 : u_{n+2} \cdot u_{n-2} - u_n^2 = (-1)^n$

استنتج أن : $u_n \wedge u_{n-2} = 1$

(2) بين أن : $\forall n \geq 2, \forall p \geq 1 : u_{n+p} = u_n u_{p+1} + u_{n+1} u_p$

(3) بين أن : $u_{n+p} \wedge u_n = u_n \wedge u_p$

استنتج أن : $u_m \wedge u_n = u_n \wedge u_m$

حيث : a هو الباقي في القسمة الأولية لـ m على n .

نم استنتج أن : $u_m \wedge u_n = u_{a \wedge n}$

نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي :

90

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n \quad \text{و} \quad u_1 = 1 \quad \text{و} \quad u_{000}$$

(1) حدد u_n بدلالة n .

(2) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+2} \wedge u_n = 2$

(3) لكل n من \mathbb{N}^* نضع : $S_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$

بين أن : $S_{n+2} \wedge S_n = 1$

(4) $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad u_{n+p} = (u_p + 1)u_n + u_p$

استنتج أن : $u_{n+p} \wedge u_n = u_p \wedge u_n$

(5) ليكن a و b من \mathbb{N}^* بحيث $a > b$ و a باقي القسمة الأولية لـ b .

د م على b .

بين أن : $u_a \wedge u_b = u_b \wedge u_a$

استنتج أن : $u_a \wedge u_b = u_{(a \wedge b)}$

91

ليكن a و b من \mathbb{Z} .

(1) أ- بين أن كل قاسم مشترك للعددين $a-b$ و $a^2 - ab + b^2$

فهو قاسم مشترك للعددين : a^2 و b^2 .

ب- استنتج أنه إذا كان العددين a و b أوليين فيما بينهما فإن العددين

$a-b$ و $a^2 - ab + b^2$ أوليان فيما بينهما.

(2) أوجد a و b بحيث :

$$4(a^2 - ab + b^2) = 23(a-b) \quad \text{و} \quad a \wedge b = 1$$

92

ليكن p و q من N^* .

$$\begin{cases} (p+q) \wedge p = 1 \\ p \wedge q(p+q) = 1 \end{cases} \quad \text{فإن: } p \wedge q = 1$$

(2) ليكن (x, y) زوج من $N^* \times N^*$ بحيث:

$$(2) \quad x(43-x) = y(x+y)$$

$$\text{نضع: } d = x \wedge y \quad \bar{y} = x = da \quad \bar{x} = db \quad y = db$$

$$1- \text{بين أن: } a(43-da) = bd(a+b)$$

$$2- \text{بين أن العدد } a \text{ يقسم } d : \text{ نضع: } d = ac$$

$$3- \text{بين أن: } c(a^2 + ab + b^2) = 43$$

$$\text{واستنتج أن: } c = 1$$

د- حدد جميع الأزواج (x, y) من $N^* \times N^*$ التي تحقق المعادلة (1).

93

(1) ليكن n من N .من أن عددًا واحدًا فقط من بين الأعداد n و $n+10$ و $n+20$

يكون قابلاً للقسمة على 3.

(2) استنتج أنه يوجد p زوج من N ثم حدد به بحيث تكون الأعداد

$$p \quad \text{و} \quad p+10 \quad \text{و} \quad p+20 \quad \text{كلها أولية.}$$

(3) 1- بين أنه كل m و r من Z :

$$[3] \quad m \equiv r \Leftrightarrow 3 \mid m - r$$

$$2- \text{استنتج حلول المعادلة: } 3x + 13y + 23z = 0 \quad \text{في } Z^3$$

94

ليكن x و y و z من N بحيث:

$$\bar{z} = \overline{101}^{(x)} \quad \bar{y} = \overline{131}^{(x)}$$

(1) أكتب العداء xyz في تلمذة العدادات الأساس x (2) هل يمكن كتابته $x+y+z$ في تلمذة العدادات الأساس x ؟(3) إذا علمت أن $x+y+z = 50$ (في تلمذة العدد العشري) فما حسب:

$$\bar{x+y+z}^{(10)} = 5$$

(4) ليكن $N = 3424$ ، حدد قيم m لكي يكون هذا العدد قابلاً للقسمةأ- على 5 من أجل $x = 6$ ب- على 12 من أجل $x = 47$

95

1- لنك d_1, d_2, \dots, d_k أعداد صحيحة طبيعية ($k \in \mathbb{N}, \{1\}$)

نضع : $\prod_{i=1}^k (1+d_i) = (1+d_1)(1+d_2) \dots (1+d_k)$
 بين أن : $\left(\prod_{i=1}^k (1+d_i) \in 2\mathbb{N} \right) \Leftrightarrow (\exists i \in [1, k], d_i \notin 2\mathbb{N})$
 2- ليكن n عددًا صحيحًا طبيعيًا غير منعدم .

($d(n)$ يرمز لعدد قواسم الموجبة للعدد n و $\pi(n)$ يرمز لعدد القواسم الموجبة لـ n)
 (1) حدد $d(n)$ و $\pi(n)$ في كل من الحالتين : $n=14$ ، $n=81$

(2) - نفترض أن : $d(n)$ عدد زوجي .

أثبت أن : $\pi(n) = \frac{d(n)}{2}$

ب- نفترض أن : $d(n)$ عدد فردي .

أثبت أن العدد n مربع كامل ثم بين أن :

$\pi(n) = \frac{d(n)-1}{2}$ بحيث $n = q^2$

ج- تحقق من أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\pi(n))^2 = \frac{d(n)}{n}$

(3) حدد عددًا صحيحًا طبيعيًا n بحيث $\pi(n) = 12^{15}$

96

بخمس الحدودية : $P(x) = 16x^3 - 20x^2 - 8x + 3$

ليكن $m \in \mathbb{Z}^+$ و $n \in \mathbb{N}^*$ أوليس بهما سهما بحيث $P(\frac{m}{n}) = 0$

(1) بين أن m يقسم 3 و n يقسم 16 .

(2) ليكن h عددًا صحيحًا نسبيًا .

1- حدد الحدودية $Q(x)$ بحيث لكل $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) - P(h) = (x-h) \cdot Q(x)$$

ب- بين أن : $(m - an)$ و n أوليا فيما بينهما .

(3) استنتج من السؤال (2) أن $(m - an)$ يقسم $P(a)$.

(4) 1- أحسب $P(a)$ من أجل $a=2$ ثم من أجل $a=-1$.

ب- باستخدام السؤال (4) و (3) اعط كل الحلول الجذرية

للمعادلة : $P(x) = 0$

لكن f دالة الحدودية المعرفة جايبي ،

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{بحيث } n \geq 2$$

و a_0, a_1, \dots, a_n تسمى إلى \mathbb{N}

ببعض p, q عكسرين من \mathbb{Z} بحيث : $paq = 1$

$$(2) \text{ س أنه إذا كان } f\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \text{ فإن } p/a_0 \text{ و } p/a_n$$

(3) نفترض أن : a_0 و a_n و $f(1)$ أعداد فردية .

أ- بين أنه لكل k و j من \mathbb{N} يجب : $(k, j) \neq (0, 0)$

$$\text{فإن : } [2] \quad p^k \cdot q^j = 1$$

$$\text{ب- استمع أن : } [2] \quad f(1) - a_0 f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$$

$$\text{ج- س أنه إذا كان } f\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \text{ فإن } [2] \quad f(2) - a_0 f\left(\frac{p}{q}\right) = 1$$

د- استمع أن المعادلة $f(x) = 0$ لا تملك حلاً حقيقياً .
(3) ليكن a عنصر من \mathbb{Z} بحيث : $f(a) \neq 0$

$$\text{أ- بين أن : } f(x) - f(a) = (x-a) \cdot g(x)$$

ب- g دالة حدودية معاملاتها سفي إلى \mathbb{Z}

$$\text{ب- س أنه إذا كان } f\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \text{ فإن } (p-aq)/g(a)$$

(4) حدد الجذور الجذرية للحدودية :

$$f(x) = 60x^6 - 212x^5 + 203x^4 + 48x^3 - 133x^2 + 10x + 24$$



أحيرة هذي !!!

الإعدادات العقدية

I - الأعداد العقدية :

$\mathbb{C} = \{a+ib \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2, i^2 = -1\}$ هي مجموعة الأعداد العقدية المعروفة كما يلي: كل عدد $z \in \mathbb{C}$ يكتب بكيفية وحيدة على الشكل $z = a+ib$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد العقدي z ويرمز له بـ $a = \Re(z)$. العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد العقدي z ويرمز له بـ $b = \Im(z)$.

$$(z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Re(z) = z \text{ و } \Im(z) = 0) \quad \text{و} \quad (z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im(z) = 0 \text{ و } \Re(z) = z)$$

العمليات في \mathbb{C} : لنك $z = a+ib$ و $z' = a'+ib'$; $(a,b,b',a') \in \mathbb{R}^4$

$$z+z' = (a+a') + i(b+b') \quad \text{الجمع}$$

$$z z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba') \quad \text{الضرب}$$

$$\lambda z = (\lambda a) + i(\lambda b)$$

$$(z \neq 0) \quad \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i \frac{-b}{a^2+b^2} \quad \text{المعكوس}$$

مرافق عدد عقدي : لنك $z = a+ib$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

مرافق العدد z هو العدد العقدي $a-ib$ ويرمز له بـ \bar{z}

$$\overline{z z'} = \bar{z} \bar{z'} \quad ; \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \text{خاصيات}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad (z \neq 0)$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z \quad ; \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$$

$$z - \bar{z} = 2i \Im(z) \quad ; \quad z + \bar{z} = 2 \Re(z)$$

معيار عدد عقدي : لنك $z = a+ib$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

معيار العدد z هو العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$ ويرمز له بـ $|z|$

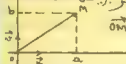
$$(z' \neq 0) \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad ; \quad |z z'| = |z| |z'| \quad \text{خاصيات}$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad ; \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z \neq 0)$$

$$\Im(z) \leq |z| \quad ; \quad |z+z'| \leq |z| + |z'| \quad ; \quad \Re(z) \leq |z|$$

II- التمثيل الهندسي للعدد عقدي :

المستوى \mathbb{C} محسوب إلى معلم متعامد مرسوم $(\vec{u}, \vec{v}, 0)$ مباشر. (يسمى للمستوى العقدي)
كل عدد عقدي $z = a + ib$ يفسر النقطة $M(a, b)$ والمتجه $\vec{OM}(a, b)$ ، $(a, b) \in \mathbb{R}^2$



العدد z يسمى لطف M (أو لطف \vec{OM})

النقطة M تسمى صورة z وتكتب : $z = aff(\vec{OM})$ (أو : $z = aff(M)$)

خاصيات : إذا كان $z_1 = aff(M_1)$ و $z_2 = aff(M_2)$ فإن :

$$|z_2 - z_1| = \|\vec{M_2 M_1}\| \quad ; \quad z_2 - z_1 = aff(\vec{M_2 M_1})$$

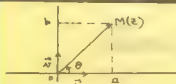
• إذا كان $z_2 = aff(\vec{u_2})$ و $z_1 = aff(\vec{u_1})$ فإن :

$$\lambda z_1 = aff(\lambda \vec{u_1}) \quad ; \quad z_1 + z_2 = aff(\vec{u_1} + \vec{u_2})$$

خاصية : لكن A و B و C على التوالي صور الأعداد z_A و z_B و z_C بحيث $z_A \neq z_C$:

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \text{ عدد حقيقي} \iff C, B, A \text{ مستقيمة}$$

III- الشكل المثلثي للعدد عقدي غير منعدم :



$(\vec{u}, \vec{v}, 0)$ معلم متعامد مباشر (أو معلم متعامد غير مباشر)

$z = a + ib$ و M لطفها $(z \neq 0)$

نكتب θ قياساً للزاوية (\vec{u}, \vec{OM})

إذا كان $\theta \in [-\pi, \pi]$ فإن :

فإن θ يسمى العقدة الرئيسية لـ z ويرمز له بـ $\arg z$

العدد θ يسمى عقدة للعدد z ويرمز له بـ $\arg z$

وتكتب : $\arg z \equiv \theta \pmod{2\pi}$

لذا : $z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ و $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$ يسمى الشكل المثلثي للعدد

وتكتب : $(r > 0) \quad z = r (\cos \theta + i \sin \theta) = [r, \theta]$

خاصيات : إذا كان $z = [r, \theta]$ و $z' = [r', \theta']$ فإن :

$$\frac{1}{z} = [\frac{1}{r}, -\theta] \quad ; \quad -z = [r, \theta + \pi] \quad ; \quad \bar{z} = [r, -\theta]$$

$$\frac{z}{z'} = [\frac{r}{r'}, \theta - \theta'] \quad ; \quad zz' = [rr', \theta + \theta']$$

صيغة موافر : $(\forall n \in \mathbb{Z}) (\forall \theta \in \mathbb{R}) : (\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

خاصية: إذا كان z_A لـ A و z_B لـ B و z_C لـ C فإن:

$$(\vec{AB}; \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$$

$$(\vec{AB}; \vec{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$$

التربيز الأسّي لعدد عقدي غير منعدم:

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{كل عدد عقدي: } z = [r, \theta] \quad \text{يكتب:}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')} \quad \text{خاصيات:} \quad e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$$

الاجذور المربعة لعدد عقدي غير منعدم:

$$n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad ; \quad \alpha = [r, \theta] \quad \text{ليكن } \alpha \in \mathbb{C}^* \text{ بحيث:}$$

المعادلة: $z^n = \alpha$ "تقبل" n حلاً في \mathbb{C} وهي الكدا = العدد n العقدية z_k

$$\text{حيث:} \quad z_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right] \quad \text{مع } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$\alpha = [r, \theta]$$

الاجذور المربعة لعدد عقدي غير منعدم:

حلول المعادلة $z^2 = \alpha$: تسمى الجذور المربعة العدد العقدي α .

$$\text{وهي:} \quad \sigma_1 = \left[\sqrt{r}, \frac{\theta}{2} \right] \quad \text{و} \quad \sigma_2 = \left[\sqrt{r}, \frac{\theta}{2} + \pi \right] \quad (\sigma_2 = -\sigma_1)$$

لدينا الجذر والمربعة لعدد عقدي غير منعدم:

$$(u, p) \in \mathbb{R}^2 : \quad \alpha = u + i p$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad z = x + i y$$

$$z^2 = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + p^2}}{2} \\ y^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + p^2}}{2} \\ 2xy = p \end{cases}$$

حل معادلة من الدرجة الثانية في \mathbb{C} :

نعتبر في المعادلة: $(a, b, c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \quad (E) : \alpha z^2 + bz + c = 0$

العدد العقدي: $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة (E) وليكن σ جذر مربع لـ (Δ)

حلول المعادلة (E) هما:

$$z_2 = \frac{-b - \sigma}{2\alpha} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-b + \sigma}{2\alpha}$$

٢- التحويل الهندسي للعمليات في \mathbb{C} :

المستوى \mathbb{C} محسوب في معلم متعامد مبني من $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

الإدراج : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ، $z \mapsto z + w$ ، w عدد عقدي .
 التطبيق : هو الإزاحة : $M(z) \xrightarrow{T_w} M'(z)$ ، حيث $M'(z) = M(z) + w$

الدوران : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ، $z \mapsto wz$ ، $w = [1, \theta]$ ، w عدد عقدي بحدس .
 التطبيق : هو الدوران : $M(z) \xrightarrow{R(0; \theta)} M'(z)$

التمثيل المتعامد : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ، $z \mapsto \bar{z}$.
 التطبيق : هو تمثيل المتعامد بالنسبة لمحور التناظر : $M(z) \xrightarrow{S(w)} M'(z)$

الانعكاس : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ، $z \mapsto w\bar{z}$ ، $w = [1, \theta]$ ، w عدد عقدي .
 التطبيق : هو مرآة الدوران $R(0, \theta)$ ، $R = R(0; 2)$

WWW



الأعداد العقديّة

ليكن z عدد من \mathbb{C} ، يثبت أن :

$$\frac{|Re(z)| + |Im(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$$

الجواب :

نضع $z = x + iy$ حيث $x, y \in \mathbb{R}$

$$\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$$

دعه يكفي أن نبين أن

$$\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow (|x| + |y|)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 2|x||y| - y^2 + 2(x^2 + y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2|x||y| + y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (|x| - |y|)^2 \geq 0$$

$$\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{منه :}$$

العبارة الأخيرة صحيحة لكل x, y من \mathbb{R} ، ومنه :

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

ولدينا :

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x^2 - y^2 - 2|x||y| \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2|x||y| \leq 0$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \quad \text{منه :}$$

العبارة الأخيرة صحيحة لكل x, y من \mathbb{R} ، ومنه :

$$\frac{|Re(z)| + |Im(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)| : \mathbb{C}$$

ليكن z عدد من \mathbb{C} .

2

$$\Im m(z) \geq 0 \Rightarrow z = \left(\sqrt{\frac{|z| + Re(z)}{2}} + i \sqrt{\frac{|z| - Re(z)}{2}} \right)^2 \quad \text{أ- يثبت أن :}$$

$$\Im m(z) \leq 0 \Rightarrow z = \left(\sqrt{\frac{|z| + Re(z)}{2}} - i \sqrt{\frac{|z| - Re(z)}{2}} \right)^2 \quad \text{ب-}$$

(2) استنتج الجذور المربعة للعديدين z_1, z_2 بحيث : $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 4 - 3i$

$$A = \sqrt{\frac{|z| + Re(z)}{2}} + i \sqrt{\frac{|z| - Re(z)}{2}} \quad \text{نضع :}$$

$$A^2 = \frac{|z| + \operatorname{Re}(z)}{2} - \frac{|z| - \operatorname{Re}(z)}{2} + 2i \sqrt{\frac{|z|^2 - \operatorname{Re}^2(z)}{4}} \quad \text{لدينا:}$$

$$7m^2(z) = |z|^2 - \operatorname{Re}^2(z) \quad \text{فإن:} \quad |z|^2 = \operatorname{Re}^2(z) + 7m^2(z)$$

$$A^2 = \operatorname{Re}(z) + i |7m(z)| \quad \text{إذن:}$$

$$7m(z) \geq 0 \Rightarrow A^2 = z \quad \text{ومنه: أ-}$$

$$7m(z) \leq 0 \Rightarrow \bar{A}^2 = \bar{z} \quad \text{ب-}$$

ملاحظة هامة: A أو \bar{A} يمثلان أحد الجذور المربعة للعدد z ، وذلك حسب إشارة $7m(z)$.

2) لنحدد الجذور المربعة للعدد العقدي: $z_1 = 2 + i$

$$\begin{aligned} \text{لدينا:} \quad |z_1| = \sqrt{5} \quad \operatorname{Re}(z_1) = 2 \quad \text{و} \quad 7m(z_1) > 0 \\ A_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad \text{ومنه أحد الجذور المربعة لـ } z_1 \text{ هو:} \\ \text{ومنه الجذور المربعة لـ } z_1 \text{ هي: } A_1 \text{ و } (-A_1) \end{aligned}$$

لنحدد الجذور المربعة للعدد العقدي: $z_2 = 4 + 3i$

$$\begin{aligned} \text{لدينا:} \quad |z_2| = 5 \quad \operatorname{Re}(z_2) = 4 \quad \text{و} \quad 7m(z_2) < 0 \\ A_2 = \sqrt{\frac{5+4}{2}} - i \sqrt{\frac{5-4}{2}} \quad \text{ومنه أحد الجذور المربعة لـ } z_2 \text{ هو:} \\ A_2 = 3\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(3-i) \end{aligned}$$

ومنه الجذور المربعة لـ z_2 هي: A_2 و $(-A_2)$.

ليكن a, b من \mathbb{C} بحيث: $a \neq b$

$$|a|=1 \Rightarrow \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1 \quad \text{نبين أن:}$$

الحواب: نفترض أن: $|a|=1$ أي: $a\bar{a}=1$ ، و $\bar{a} = \frac{1}{a}$

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = \left| \frac{a-b}{1-\frac{1}{a}b} \right| = \left| \frac{a-b}{a-b} a \right| \quad \text{لدينا:}$$

$$= |a| = 1$$

$$|a|=1 \Rightarrow \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1 \quad \text{ومنه:}$$

يكن a و b و c من \mathbb{C} ؛ بين أن :

4

$$|a|=|b|=|c|=1 \Rightarrow |ab+bc+ca|=|a+b+c|$$

الجواب : نفترض أن : $|a|=|b|=|c|=1$ ومنه : $|abc|=1$

$$|ab+bc+ca| = \frac{|ab+bc+ca|}{|abc|} = \left| \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \right|$$

$$= \left| \frac{a}{c} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \right| \quad (\text{لأن : } |a|=|b|=|c|=1)$$

$$= \left| \frac{a}{c} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \right|$$

$$\text{بما أن : } |a|=1 \Leftrightarrow \frac{a}{a}=1$$

$$\frac{a}{c}=1 \quad ; \quad \frac{a}{b}=b \quad ; \quad \frac{a}{a}=a$$

$$|ab+bc+ca|=|a+b+c| \quad \text{وبالتالي :}$$

حدد معيار وعمدة كل من الأعداد العقدية التالية :

5

$$z_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24} ; \quad z_2 = (\sqrt{2}-\sqrt{3} - i\sqrt{2}+\sqrt{3})^{42} ; \quad z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$$

$$z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} \quad \text{الجواب : لدينا :}$$

$$|z_1| = \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right|^{20} = \left(\frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i|} \right)^{20} \quad \text{لنحدد معيار } z_1 \text{ : لدينا :}$$

$$|1-i| = \sqrt{2} \quad ; \quad |1+i\sqrt{3}| = 2 \quad \text{وبما أن :}$$

$$|z_1| = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{20} = (\sqrt{2})^{20}$$

$$|z_1| = 2^{20} \quad \text{ومنه :}$$

$$\arg z_1 = \arg \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20} \quad [2\pi] \quad \text{لنحدد عمدة } z_1 \text{ : لدينا :}$$

$$= 20 \arg \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right) \quad [2\pi]$$

$$= 20 (\arg(1+i\sqrt{3}) - \arg(1-i)) \quad [2\pi]$$

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{بما أن :}$$

$$1-i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \quad 3$$

$$\arg(1-i) \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad ; \quad \arg(1+i\sqrt{3}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad \text{فإن}$$

$$\arg z_1 \equiv 2\pi \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \quad [2\pi] \quad \text{ومن}$$

$$\arg z_1 \equiv \frac{35\pi}{12} \quad [2\pi] \quad \text{وبالتالي}$$

$$z_1 = (\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}})^{42} \quad \text{لدينا}$$

$$z_2 = (2-\sqrt{3} - 2-\sqrt{3} - 2i\sqrt{4-3})^{21} \quad \text{فإن}$$

$$z_2 = (-2\sqrt{3} - 2i)^{21}$$

$$z_2 = (-2)^{21} (\sqrt{3}+i)^{21}$$

$$|z_2| = 2^{21} \cdot |\sqrt{3}+i|^{21} = 2^{21} \cdot 2^{21} = 2^{42} \quad \text{لنحدد معيار } z_2$$

$$(|\sqrt{3}+i| = 2) \quad \text{فإن}$$

$$\arg z_2 \equiv \arg(-2)^{21} + \arg(\sqrt{3}+i)^{21} \quad [2\pi] \quad \text{لنحدد عمدة } z_2$$

$$\equiv \arg(-2)^{21} + 21 \arg(\sqrt{3}+i) \quad [2\pi]$$

$$-2^{21} = 2^{21} (\cos\pi + i\sin\pi) \quad ; \quad \sqrt{3}+i = 2 \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \right) \quad \text{بما أن}$$

$$\arg z_2 \equiv -\pi + 21 \cdot \frac{\pi}{6} \quad [2\pi] \quad \text{فإن}$$

$$\arg z_2 \equiv \frac{5\pi}{2} \quad [2\pi] \quad \text{أي}$$

$$z_3 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right)^{24} \quad \text{لدينا}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : 1 = e^{ix} \cdot e^{-ix} \quad ; \quad e^{ix} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^2 \quad \text{مدى حقة هامة}$$

$$1 = e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{12}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^2 \quad \text{لدينا}$$

$$z_3 = \left(e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{12}} - \left(e^{i\frac{\pi}{12}} \right)^2 \right)^{24} \quad \text{ومن}$$

$$\begin{aligned} &= \left(e^{i\frac{\pi}{12}} \left(e^{-i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{12}} \right) \right)^{24} \\ &= e^{2i\pi} \cdot \left(-2i \sin \frac{\pi}{12} \right)^{24} = 2^{24} \sin^{24} \frac{\pi}{12} > 0 \end{aligned}$$

$$\arg z_3 \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad ; \quad |z_3| = 2^{24} \sin^{24} \frac{\pi}{12} \quad \text{وبالتالي}$$

6

حدد معيار وعمدة العدد العقدي z بحيث:

$$z^n \in \mathbb{N} \quad \text{ع} \quad z = (1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$$

الجواب : نضع : $z_0 = (1 + i\sqrt{3})^n$ ، ومنه : $\bar{z}_0 = (1 - i\sqrt{3})^n$

$$z = z_0 + \bar{z}_0 = 2\operatorname{Re}(z_0)$$

لذا : $\operatorname{Re}(z_0)$ لنحدد

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ومنه : $z_0 = (1 + i\sqrt{3})^n = 2^n \left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$ (حسب علاقة توافر)

$$z = 2 \cdot 2^n \cdot \cos\frac{n\pi}{3}$$

وبالتالي :

$$z = 2^{n+2} \cdot \cos\frac{n\pi}{3}$$

إذا كان : $\cos\frac{n\pi}{3} > 0$ فإن : $|z| = 2^{n+2} \cdot \cos\frac{n\pi}{3}$; $\arg z \in [0, 2\pi]$

إذا كان : $\cos\frac{n\pi}{3} < 0$ فإن : $|z| = -2^{n+2} \cdot \cos\frac{n\pi}{3}$; $\arg z \in \pi [2\pi]$

ملاحظة : لكل $n \in \mathbb{N}$: $\cos\frac{n\pi}{3} \neq 0$; $\frac{n\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$

7

ليكن θ عدد حقيقي من $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$$z = \frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 - \cos\theta - i\sin\theta}$$

نضع :

حدد معيار وعمدة العدد العقدي z .

الجواب : نضع : $z_1 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$; $z_2 = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$

لدينا : $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $\arg z = \arg z_1 - \arg z_2 [2\pi]$

$$z_1 = 2\cos\frac{\theta}{2} + i2\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \quad \left(\begin{array}{l} 1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \end{array} \right)$$

$$z_2 = 2\cos\frac{\theta}{2} \left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} \right)$$

$$z_2 = 1 - \cos\theta - i\sin\theta = 1 + \cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)$$

$$z_2 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$|z_2| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| \quad ; \quad |z_1| = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

لذا :

بما أن : $\theta_2 \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) فإن : $|z| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{|\cos \frac{\theta_2}{2}|}{|\sin \frac{\theta_2}{2}|}$ (لأن : $|\cos(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{2})| = |\sin(\frac{\theta_2}{2})|$)

ومنه : $|z| = |\cotan \frac{\theta_2}{2}|$

لنحدد عمدة z . لدينا : $\arg z = \arg z_2 - \arg z_1$ [2 π]

$$z = \frac{2 \cos \frac{\theta_2}{2} (\cos \frac{\theta_2}{2} + i \sin \frac{\theta_2}{2})}{-2 \sin \frac{\theta_2}{2} (\cos(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{2}))}$$

$$z = -\cotan \frac{\theta_2}{2} \left(\frac{[1, \frac{\theta_2}{2}]}{[1, \frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{2}]} \right)$$

$$z = -\cotan \frac{\theta_2}{2} \left([1, \frac{\theta_2}{2} - (\frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{2})] \right)$$

$$z = -\cotan \frac{\theta_2}{2} \left([1, -\frac{\pi}{2}] \right)$$

ومنه إذا كان : $-\cotan \frac{\theta_2}{2} > 0$ فإن : $z = [-\cotan \frac{\theta_2}{2}, -\frac{\pi}{2}]$

إذاً : $\arg z = -\frac{\pi}{2}$ [2 π]

إذا كان : $-\cotan \frac{\theta_2}{2} < 0$ فإن : $z = [\cotan \frac{\theta_2}{2}, -\frac{\pi}{2} + \pi]$

إذاً : $\arg z = \frac{\pi}{2}$ [2 π]

ليكن θ_2, θ_1 من \mathbb{R} حيث :

8

نضع : $z_2 = e^{i\theta_2} = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$; $z_1 = e^{i\theta_1} = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1$

حدد معيار وعمدة العدد العقدي $z = z_2 + z_1$

الجواب : لدينا : $z = e^{i\theta_2} + e^{i\theta_1}$

$$z = e^{i\theta_2} (1 + e^{i(\theta_1 - \theta_2)})$$

ولدينا : $e^{i(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2})} = \left(e^{i(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2})} \right)^2 = 1 = e^{i(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2})} \cdot e^{-i(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2})}$

ومنه : $z = e^{i\theta_2} \cdot e^{i(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2})} \left(e^{-i(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2})} + e^{i(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2})} \right)$

نعلم أن : $\forall x \in \mathbb{R} : e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$

ومنه : $z = e^{i(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})} \cdot 2 \cos(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2})$

ومنه : $|z| = 2 \left| \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \right|$

ملاحظة هامة : $\Rightarrow \begin{cases} |z| = |a| \\ \arg z = \begin{cases} \theta & [2\pi] ; a > 0 \\ \theta + \pi & [2\pi] ; a < 0 \end{cases} \end{cases}$

ومنه : $\arg(z) = \arg(z_1 + z_2) = \begin{cases} \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} & [2\pi] ; \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) > 0 \\ \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \pi & [2\pi] ; \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) < 0 \end{cases}$

ليكن a, b من \mathbb{C} بحيث : $a+b$ و $|a|=|b|=1$ 9

بين أن : $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}$

الجواب : ملاحظة هامة : $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$

ليكن z من \mathbb{C} نضع :

$$z = \frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a-b}$$

لدينا :

$$\bar{z} = \frac{\bar{z} + a\bar{b}\bar{z} - (\bar{a} + \bar{b})}{\bar{a} - \bar{b}}$$

بما أن : $|a|=1$ و $|b|=1$ فإن : $\bar{a} = \frac{1}{a}$ و $\bar{b} = \frac{1}{b}$

ومنه :

$$\bar{z} = \frac{\bar{z} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \bar{z} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$z = \frac{ab\bar{z} + \bar{z} - (a+b)}{b-a} = - \frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a-b}$$

لأن : $\bar{z} = -z$ وبالتالي : $z \in i\mathbb{R}$

ليكن z من \mathbb{C} بين أن : 10

$$|z|=1 \Rightarrow i \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \in \mathbb{R}$$

الجواب : ليكن z من \mathbb{C} نضع :

بحيث : $|z|=1$ أي : $\bar{z} = \frac{1}{z}$

$$z = i \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$$

$$\bar{z} = -i \left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \right) = -i \left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} \right) \quad \text{لدينا.}$$

$$z = -i \left(\frac{3+1}{3-1} \right) = i \left(\frac{1+3}{1-3} \right)$$

ومثلاً : $\bar{z} = z$ ، وبالتالي : $z \in \mathbb{R}$

11 ليكن a, b من \mathbb{R} بحيث : $a > 0$

$$z = a \frac{1+ib}{1-ib} \quad \text{نضع :}$$

حدد معيار وعمدة العدد العقدي z .

الجواب : لنحدد معيار z :

$$|z| = |a| \cdot \frac{|1+ib|}{|1-ib|} \quad \text{لدينا ،}$$

$$(b \in \mathbb{R}) \quad |1+ib| = |\overline{1+ib}| = |1-ib| \quad \text{بمألأن :}$$

$$|z| = |a| = a \quad \text{فإن :} \quad (a > 0)$$

لنحدد عمدة z :

$$x > 0 \Leftrightarrow \arg x \equiv 0 [2\pi] ; \quad x < 0 \Leftrightarrow \arg x \equiv \pi [2\pi] \quad \text{ملاحظة هامة :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \arg(1+ix) \equiv \operatorname{Arctan} x \quad [2\pi]$$

$$\arg z \equiv \arg a + \arg \left(\frac{1+ib}{1-ib} \right) \quad [2\pi] \quad \text{لدينا ،}$$

$$\arg(a) \equiv 0 [2\pi] \quad \text{فإن :} \quad a > 0$$

$$\text{ولدينا :} \quad \arg(1-ib) \equiv -\operatorname{Arctan} b [2\pi] ; \quad \arg(1+ib) \equiv \operatorname{Arctan} b [2\pi]$$

$$\arg z \equiv \arg(1+ib) - \arg(1-ib) [2\pi] \quad \text{إذن :}$$

$$\equiv \operatorname{Arctan} b + \operatorname{Arctan} b \quad [2\pi]$$

$$\arg z \equiv 2 \operatorname{Arctan} b \quad \text{وبالتالي :}$$

$$z = [a ; 2 \operatorname{Arctan} b] \quad \text{إذن ،}$$

ليكن z_1 و z_2 من \mathbb{C} . بين أن :

12

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |2 + z_1 z_2| = 1 \end{cases} \Rightarrow z_1 z_2 = -1$$

الجواب : ملاحظه مهمه : $|z| = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} : z = e^{i\theta}$

$$\begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 : z_1 = e^{i\theta_1} \quad \bar{z}_2 = e^{-i\theta_2}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| = R \Leftrightarrow z \bar{z} = R^2$$

$$|2 + z_1 z_2| = 1 \Leftrightarrow (2 + z_1 z_2) \overline{(2 + z_1 z_2)} = 1$$

$$\Leftrightarrow (2 + e^{i(\theta_1 + \theta_2)}) (2 + e^{-i(\theta_1 + \theta_2)}) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 + 2(e^{i(\theta_1 + \theta_2)} + e^{-i(\theta_1 + \theta_2)}) + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2i \cos(\theta_1 + \theta_2) = -4$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta_1 + \theta_2) = -1$$

$$\cos^2(\theta_1 + \theta_2) + \sin^2(\theta_1 + \theta_2) = 1$$

$$(\cos^2(\theta_1 + \theta_2) = 1 \quad \text{و} \quad \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0)$$

$$z_1 z_2 = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$z_1 z_2 = -1$$

وبالتالي :

حدد جميع المتعدد العنصريه z بحيث تكون $\frac{1}{z^2}$ و $\frac{1}{z^3}$ مترافقان .

13

الجواب : لربما : z^3 و $\frac{1}{z^2}$ مترافقان يعني أن $z^7 = (\frac{1}{z^2}) = \frac{1}{z^2}$

$$|z^3| = \frac{1}{|z|^2} \quad \text{و} \quad |z^3| = 1$$

$$|z| = 1$$

$$\exists \theta \in \mathbb{R} : z = e^{i\theta}$$

لدينا : $\frac{1}{z^2} = e^{-2i\theta}$ و منه : $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2}$ $\Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{2i\theta}$ $\Leftrightarrow e^{2i\theta} = 1$

$\Leftrightarrow 0 = \frac{2k\pi}{2} \quad |k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

وبالتالي : z^2 و $\frac{1}{z^2}$ مترافقان $\Leftrightarrow z \in \{e^{\frac{2k\pi}{2}i} \mid k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

14 حدد الحذور المربعة للعدد العقدي : $z = 4ab + i(a^2 - b^2)$ حيث : $a, b \in \mathbb{R}$ و $a > b$

الجواب : ليكن z جذر مربع للعدد z ، إذن : $z^2 = z$

نضع : $z = x + iy$ ، بحيث : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، ومنه : $z^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4ab \\ xy = a^2 - b^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-y^2) = 4ab \\ x^2 - y^2 = -(a^2 - b^2)^2 \end{cases}$

إذن : x^2 و $(-y^2)$ حلان للمعادلة : $X^2 - 4abX - (a^2 - b^2)^2 = 0$

التي تقبل الحلان : $x_1 = (a+b)^2$ و $x_2 = -(a-b)^2$ ، ومنه : $y = \pm_2(a-b)$ و $x = \pm_1(a+b)$ ، حيث : \pm_1, \pm_2 عنصرين من $\{-1, 1\}$ ، واعتبار $xy = a^2 - b^2 > 0$ نحصل على $\pm_1 \pm_2 = 1$ أي : $z = \epsilon [(a+b) + i(a-b)]$ حيث : $\epsilon \in \{-1, 1\}$

15 ليكن z و z' و μ من \mathbb{C} بحيث : $zz' = \mu^2$

يبين أن : $|z| + |z'| = \left| \frac{z+z'}{2} + \mu \right| + \left| \frac{z+z'}{2} - \mu \right|$

الجواب : ملاحظة مامة : $\forall z \in \mathbb{C} \exists a \in \mathbb{C} \quad z = a^2$ ، لدينا : $\exists b \in \mathbb{C} : z' = b^2$ ، بمأن : $\mu^2 = zz' = (ab)^2$ ، فإن : $\mu = -ab$ أو $\mu = ab$

* إذا كان: $a \neq b$ لدينا:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{z+z'}{2} + a \right| \left| \frac{z+z'}{2} - a \right| \\ &= \left| \frac{a^2+b^2}{2} + ab \right| + \left| \frac{a^2+b^2}{2} - ab \right| \\ &= \frac{1}{2} |(a+b)^2| + \frac{1}{2} |(a-b)^2| = \frac{1}{2} (|a+b|^2 + |a-b|^2) \\ &= \frac{1}{2} ((a+b)(\bar{a}+\bar{b}) + (a-b)(\bar{a}-\bar{b})) \\ &= \frac{1}{2} (a\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{b} + a\bar{a} - a\bar{b} - b\bar{a} + b\bar{b}) \\ &= \frac{1}{2} (2a\bar{a} + 2b\bar{b}) = a\bar{a} + b\bar{b} = |a|^2 + |b|^2 \\ & \left| \frac{z+z'}{2} + a \right| + \left| \frac{z+z'}{2} - a \right| = |z| + |z'| \end{aligned}$$

وبالتالي:

* بالمثل يحل نفس النتيجة إذا كان: $a = -b$.

16

ليكن a و b مختلفين.

$$\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| = \frac{|a-b|}{|a||b|} \quad \text{بين أن:}$$

الجواب: لدينا:

$$|b|^2 = b\bar{b} \quad \text{و} \quad |a|^2 = a\bar{a}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| &= \left| \frac{a}{a\bar{a}} - \frac{b}{b\bar{b}} \right| = \left| \frac{1}{\bar{a}} - \frac{1}{\bar{b}} \right| \\ &= \frac{|\bar{b} - \bar{a}|}{|\bar{a}\bar{b}|} = \frac{|\overline{b-a}|}{|\overline{ab}|} \end{aligned}$$

وبما أن:

$$|\overline{b-a}| = |b-a| \quad \text{و} \quad |\overline{ab}| = |ab| = |a||b|$$

فإن:

$$\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}$$

17

ليكن z من \mathbb{C} بحيث:

$$z \neq -1 \quad \text{و} \quad |z| = 1 \quad \text{بين أن:}$$

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad z = \frac{1+xi}{1-xi}$$

الجواب: لدينا:

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} : z = e^{i\theta}$$

نضع:

$$(z \neq -1 \Leftrightarrow \theta \neq \pi \pmod{2\pi})$$

$$x = \tan \frac{\theta}{2}$$

$$z = \frac{1+xi}{1-xi} \quad \text{بين أن:}$$

$$\frac{1+xi}{1-xi} = \frac{1 + (\tan \frac{\theta}{2})i}{1 - (\tan \frac{\theta}{2})i} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}} = e^{i\theta} = z$$

وبالتالي: $\exists x \in \mathbb{R} : z = \frac{1+xi}{1-xi}$

ليكن $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ بحيث: $1 + z_1 z_2 = 0$

18

من أن: $|z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$

الجواب: لدينا: $|z_1| = |z_2| = 1 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1} \text{ و } \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$

نضع: $z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$

لدينا: $\bar{z} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}} = \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2 + 1} = z$

ومنه: $z \in \mathbb{R}$

لكن a, b, c, d أعداد عندده متباينة مهي، فني

19

من أن: $\left[\frac{a-d}{b-c} \in i\mathbb{R} \text{ و } \frac{b-d}{c-a} \in i\mathbb{R} \right] \Rightarrow \frac{c-d}{a-b} \in i\mathbb{R}$

الجواب: لدينا: $\begin{cases} \frac{a-b}{b-c} \in i\mathbb{R} \\ \frac{b-d}{c-a} \in i\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{b}-\bar{c}} = -\frac{a-b}{b-c} \\ \frac{\bar{b}-\bar{d}}{\bar{c}-\bar{a}} = -\frac{b-d}{c-a} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{a}b - \bar{a}c - \bar{d}b + \bar{d}c = d\bar{b} - a\bar{b} - d\bar{c} + a\bar{c} & (1) \\ \bar{c}b - a\bar{b} - c\bar{d} + \bar{d}a = d\bar{c} - a\bar{d} + \bar{a}b & (2) \end{cases}$

ومنه: $(1) + (2) \Leftrightarrow c(\bar{b} - \bar{a}) + \bar{d}(a - b) = d(\bar{b} - \bar{a}) + \bar{c}(a - b)$

$\Leftrightarrow (\bar{b} - \bar{a})(c - d) = (a - b)(\bar{c} - \bar{d})$

$\Leftrightarrow \frac{\bar{c} - \bar{d}}{\bar{a} - \bar{b}} = -\frac{c - d}{a - b} \Leftrightarrow \frac{c - d}{a - b} \in i\mathbb{R}$

$$z_2 = \sqrt{3} - i$$

و

$$z_1 = 1 + i$$

ليكن

20

(1) حدد معيار وعمدة لكل من z_1 و z_2 .

(2) حدد الشكل الجبري و الشكل الجبري للعدد $z_1 z_2$.

و استنتج : $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

$$z_2 = \sqrt{3} - i$$

و

$$z_1 = 1 + i$$

الجواب : (1) لدينا :

$$|z_2| = 2$$

و

$$|z_1| = \sqrt{2}$$

إذن :

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

لدينا :

$$z_1 = [\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}] \quad \text{و} \quad \arg z_1 = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$z_2 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

لدينا :

$$z_2 = [2; -\frac{\pi}{6}] \quad \text{و} \quad \arg z_2 = -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$$

$$z_1 z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i) = \sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$$

(2) لدينا :

$$z_1 z_2 = [\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}] [2; -\frac{\pi}{6}]$$

ولدينا :

$$= [2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}] = [2\sqrt{2}; \frac{\pi}{12}]$$

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

إذن :

$$\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + i 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12}$$

و

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{3}+1 \\ 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

ليكن u عدد عقدي معياره r وعمده θ ، ومرافقه \bar{u}

21

احسب بدلالة r و θ التعبير : $u^n + \bar{u}^n$ و $u^2 + \bar{u}^2$.

الجواب : لدينا : $u = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، إذن : $\bar{u} = r(\cos \theta - i \sin \theta)$

$$u^k = r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta)$$

$$u^k + \bar{u}^k = 2r^k (\cos k\theta) = 2r^k \cos k\theta$$

ولدينا :

$$P_n = \sum_{k=1}^n (u^k + \bar{u}^k) = \sum_{k=1}^n 2r^k \cos k\theta$$

و

$$P_n = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \cos \theta \cos 2\theta \dots \times \cos n\theta$$

و بما أن : $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
 فإن : $P_n = z^n \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \times \cos \theta \cos 2\theta \times \dots \times \cos n\theta$

22 ليكن z عدد عقدي و θ عدد حقيقي بحيث :

$$z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0$$

بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : z^{2n} - 2z^n \cos n\theta + 1 = 0$

الجواب : لدينا : $z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0 \Leftrightarrow (z - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 0$

$$\Leftrightarrow (z - \cos \theta)^2 - (i \sin \theta)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - \cos \theta - i \sin \theta)(z - \cos \theta + i \sin \theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \cos \theta + i \sin \theta \text{ أو } z = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow z = e^{i\theta} \text{ أو } z = e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow z^n = e^{in\theta} \text{ أو } z^n = e^{-in\theta}$$

ومنه : $(z^n - e^{in\theta})(z^n - e^{-in\theta}) = 0$

$$\Leftrightarrow z^{2n} - (e^{in\theta} + e^{-in\theta})z^n + e^{in\theta} \cdot e^{-in\theta} = 0$$

$$z^{2n} - 2z^n \cos n\theta + 1 = 0 \quad \text{أي :}$$

23 ليكن a, b عددين عقديين بحيث : $a \neq b$

بين أن : $|a| = |b| \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{a-b}\right) \in \mathbb{R}^+$

الجواب : \Rightarrow لدينا : $(b \neq 0) : |a| = |b| \Leftrightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = 1$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} : \frac{a}{b} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} : a = b e^{i\theta}$$

نضع : $z = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$

لدينا : $z = \left(\frac{b e^{i\theta} - b}{b e^{i\theta} + b}\right)^2 = \left(\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}\right)^2 = \left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})}\right)^2$

$$z = \left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right)^2 = \left(\frac{2 \cos \frac{\theta}{2}}{2i \sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 = -(\tan \frac{\theta}{2})^2$$

ومنه : $z \in \mathbb{R}^-$

$$\left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 \equiv \pi \pmod{2\pi} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \arg \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$\Rightarrow \arg \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{a+b}{a-b} = \alpha i$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ : a(1+i\alpha) = b(1+i\alpha)$$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ : |\alpha| |1+i\alpha| = |b| |1+i\alpha|$$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ : |\alpha| \sqrt{1+\alpha^2} = |b| \sqrt{1+\alpha^2}$$

$$\Rightarrow |\alpha| = |b| \quad (\sqrt{1+\alpha^2} \neq 0 \text{ لأن } \alpha \in \mathbb{R}^+)$$

$$|\alpha| = |b| \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 \in \mathbb{R}^- \quad \text{بالتالي،}$$

ليكن z, z' عددان من مجموعة ميب و μ عدد حقيقي بحيث

$$\mu^2 = z z'$$

$$\arg z - \arg z' \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \Rightarrow \frac{z+z' + i(z-z')}{\mu} \in \mathbb{R} \quad \text{سأ}$$

$$x = \frac{z+z' + i(z-z')}{\mu} \quad \text{الجواب : نضع}$$

نعرض μ . $\arg z - \arg z' \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ ، وبسبب أن $\mu \neq 0$ ، $\arg \mu \equiv 0 \pmod{2\pi}$

$$\text{نضع : } \theta \equiv \arg z \pmod{2\pi} \quad \text{ومن } \theta \equiv \arg z' \pmod{2\pi} \quad \frac{\pi}{2} + \theta \equiv \arg z' \pmod{2\pi}$$

$$x = \frac{z(1+i) + z'(1-i)}{\mu} \quad \text{لدينا}$$

$$\mu x = z(1+i) + z'(1-i) \quad \text{ومن}$$

$$\arg z(1+i) \equiv \arg z + \arg(1+i) \pmod{2\pi} \quad \text{لدينا}$$

$$\arg z(1+i) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \quad \text{لأن } (\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi})$$

$$\arg z'(1-i) \equiv \arg z' + \arg(1-i) \pmod{2\pi}$$

$$\arg z'(1-i) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \quad \text{لأن } (\arg(1-i) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi})$$

$$\arg z(1-i) = 0 + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{منه :}$$

$$\begin{cases} \arg z = 1 \quad [2\pi] \\ \arg z' = 1 \quad [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \arg(z+z') = 1 \quad [2\pi] \quad \text{منه :}$$

$$\begin{cases} \arg(1+i)z = 0 + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \\ \arg(1-i)z' = 0 + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \arg((1+i)z + (1-i)z') = 0 + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{لدينا :}$$

$$\arg \mu = 0 + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{ومنه :}$$

$$\Leftrightarrow \arg \mu + \arg z = 0 + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$\arg \mu = \arg z + \arg z' \quad [2\pi] \quad \text{بما أن } \mu = zz'$$

$$2 \arg \mu = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$$

$$\arg \mu = \frac{1}{2} (\arg z + \arg z') \quad [2\pi] \quad \text{إذن :}$$

$$\arg \mu = 0 + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{منه :}$$

$$\arg \mu + \arg z = 0 + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{وبما أن :}$$

$$\arg z = 0 \quad [2\pi] \quad \text{فإن :}$$

$$\arg z = 0 \quad [2\pi] \quad \text{منه :}$$

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{بجبر العدد العقدي :} \quad \mathbf{25}$$

$$T = z^1 + z^5 + z^6 \quad \text{نضع :} \quad S = z + z^2 + z^4$$

(1) تب أن العددين S و T منفردين

(2) تب أن $\operatorname{Im}(S) > 0$

(3) أحسب $S+T$ و $S-T$

(4) استنتج قيم S و T

$$z^7 = 1 \quad \text{لدينا :} \quad z = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{إذن :}$$

$$S = z + z^2 + z^4 \quad \text{(1) لدينا :}$$

$$z = \frac{1}{z^6} \quad \text{بما أن :} \quad |z| = 1$$

$$z^3 = \frac{1}{z^4} \quad \text{ولدينا :} \quad z^5 = \frac{1}{z^2} \quad \text{و} \quad z^6 = \frac{1}{z}$$

$$S = z^6 + z^5 + z^3 = T \quad \text{منه :} \quad \text{إذن :} \quad S = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4}$$

وبالتالي S و T حترافيتين .

(2) ليبي أن : $\Re(S) > 0$

$$S = z + z^2 + z^4 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Re(S) = \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{8\pi}{3} \quad \text{ومنه :}$$

$$= \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \sin \frac{4\pi}{3}$$

$$= \sin \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{3} = \sin \frac{4\pi}{3} > 0$$

$$(0 < \frac{4\pi}{3} < \frac{\pi}{2}) \quad \Re(S) > 0 \quad \text{ومنه :}$$

(3) لنحسب : $S+T$ و ST

$$S+T = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 \quad \text{لدينا :}$$

$$= (z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6) - 1$$

$$S+T = \frac{1-z^7}{1-z} - 1 = -1 \quad (z^7 = 1 \text{ و } z \neq 1)$$

$$S+T = -2 \quad \text{ومنه :}$$

$$ST = (z + z^2 + z^4)(z^3 + z^5 + z^6) \quad \text{لدينا :}$$

$$ST = z^6 + z^5 + z^4 + z^8 + z^9 + z^7 \quad \text{بعد النشر نعمل على :}$$

$$ST = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 3 \quad (z^7 = 1)$$

$$(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0) \quad ST = 2 \quad \text{ومنه :}$$

$$X^2 + X + 2 = 0 \quad \text{ومنه } S \text{ و } T \text{ حلول المعادلة :} \quad \begin{cases} S+T = -1 \\ ST = 2 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2} \quad ; \quad x_1 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2} \quad \text{ومما :}$$

$$T = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}i}{2} \quad ; \quad S = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2} \quad \text{فإن :} \quad \Re(S) > 0 \quad \text{وبما أن :}$$

ليكن n من N^* : نعتبر المتسلسلة : (S_n) المعروفة بمايلي :

$$S_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \text{نضع (1)}$$

$$S = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} \quad \text{أ- أحسب :}$$

$$\Re(S) \quad \text{ب- حدد :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_n}{n}\right) \quad \text{ج- استنتج أن :} \quad S_n = \frac{1}{2 \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \quad \text{ثم حدد}$$

26

الجواب : (2) - لدينا : $S = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$
 $= \frac{z^n - 1}{z - 1}$ (لأن $z \neq 1$)

وبما أن $z^n = \cos n\pi + i \sin n\pi = -1$ فإن : $S = \frac{-2}{z - 1}$

إذن : $S = \frac{-2}{e^{i\frac{\pi}{2n}} - 1} = \frac{-2 e^{-i\frac{\pi}{4n}}}{e^{i\frac{\pi}{4n}} - e^{-i\frac{\pi}{4n}}}$

$S = \frac{-2 e^{-i\frac{\pi}{4n}}}{2i \sin \frac{\pi}{4n}} = \frac{i e^{-i\frac{\pi}{4n}}}{\sin \frac{\pi}{4n}}$

ومنه : $S = \frac{i}{\sin \frac{\pi}{2n}} (\cos \frac{\pi}{2n} - i \sin \frac{\pi}{2n})$

$S = 1 + i \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$

ب. - بما أن : $S = 1 + i \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$ فإن : $\operatorname{Re}(S) = 1$ و $\operatorname{Im}(S) = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$

(2) لدينا : $S = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$
 $= 1 + (\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}) + (\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}) + \dots + (\cos \frac{(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{(n-1)\pi}{n})$
 $= 1 + (\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}) + (\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}) + \dots + (\cos \frac{(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{(n-1)\pi}{n})$
 $= (1 + \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n}) + i (\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n})$
 ومنه : $S_n = \operatorname{Im} S = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \tan \frac{\pi}{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}} \times \frac{2}{\pi}$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{2}{\pi}$

ليكن n من \mathbb{N}^* و θ عدد حقيقي.

27

أحسب المجموع : $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^k \theta \cos k\theta$

الجواب : نضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^k \theta \sin k\theta$
 $Z = C_n + i S_n$

3

$$z = \sum_{k=0}^{n-1} (\cos k\theta + i \sin k\theta) \cos^k \theta \quad \text{لدينا:}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \cos^k \theta e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n-1} (\cos \theta e^{i\theta})^k$$

$$z = \frac{1 - \cos^n \theta e^{in\theta}}{1 - \cos \theta e^{i\theta}} \quad \text{إذن:}$$

$$z = \frac{1 - \cos^n \theta (\cos n\theta + i \sin n\theta)}{1 - \cos \theta e^{i\theta}}$$

$$1 - \cos \theta e^{i\theta} = 1 - \cos^2 \theta - i \cos \theta \sin \theta = \sin^2 \theta - i \cos \theta \sin \theta \quad \text{لدينا:}$$

$$= \sin \theta (\sin \theta - i \cos \theta)$$

$$z = \frac{(1 - \cos^n \theta (\cos n\theta + i \sin n\theta)) (\sin \theta + i \cos \theta)}{\sin \theta (\sin \theta - i \cos \theta) (\sin \theta + i \cos \theta)} \quad \text{إذن:}$$

$$z = \frac{(1 - \cos^n \theta (\cos n\theta + i \sin n\theta)) (\sin \theta + i \cos \theta)}{\sin \theta}$$

$$z = \frac{\sin \theta + i \cos \theta - i \cos^n \theta (\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta)}{\sin \theta}$$

$$z = \frac{\sin \theta + \cos^n \theta \sin(n-1)\theta - i \cos^2 \theta \cos(n-1)\theta}{\sin \theta}$$

$$c_n = \operatorname{Re}(z) = 1 + \frac{\cos^2 \theta \sin(n-1)\theta}{\sin \theta} \quad \text{منه:}$$

28 ليكن $n \in \mathbb{N}$: نضع : $z_n = \left(\frac{3-4i}{5}\right)^n$

(1) بين أن : $z_n = 1 \iff (2+i)^n = (2-i)^n$

(2) بين أن : $z_n = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (2-i)^k (2-i)^{n-k} = -(2-i)^n$

(3) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n \neq 0$ [5]

(4) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : z_n \neq 1$

الاجواب : (1) ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$(2+i)^n = (2-i)^n \iff \left(\frac{2-i}{2+i}\right)^n = 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$\iff \left(\frac{(2-i)(2-i)}{5}\right)^n = 1$$

$$(z+i)^n = (z-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 1 \quad \text{, ومنه ,}$$

$$\Leftrightarrow z_n = 1$$

$$(z+i)^n = (z-i)^n \quad \text{, ومنه , } z_n = 1$$

$$\Leftrightarrow (z-i)^n = ((z-i) + 2i)^n$$

$$\Leftrightarrow (z-i)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (z-i)^k (2i)^{n-k}$$

$$(z-i)^n = (2i)^n + (z-i)^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (z-i)^k (2i)^{n-k}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (z-i)^k (2i)^{n-k} = -(2i)^n \quad \text{, ومنه ,}$$

$$2^{2n} = 4^n \quad \text{(3) ليكن } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ فربما :}$$

$$2^{2n} = (-4)^n \quad [5] \quad \text{وبما أن : } 4 = -1 \quad [5] \quad \text{فإن :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^{2n} \neq 0 \quad [5] \quad \text{ومنه ,}$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad z_{n_0} = 1 \quad \text{(4) البرهان بالغلف نقترح أن :}$$

$$\sum_{k=1}^{n_0-1} C_n^k (z-i)^k (2i)^{n_0-k} = -(2i)^{n_0} \quad \text{حسب السؤال (4) لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow (z-i) \sum_{k=1}^{n_0-1} C_n^k (z-i)^{k-1} (2i)^{n_0-k} = -(2i)^{n_0}$$

$$\exists! (d, p) \in \mathbb{Z}^2 : \sum_{k=1}^{n_0-1} C_n^k (z-i)^k (2i)^{n_0-k} = d + ip \quad \text{, ولدينا :}$$

$$(z-i)(d+ip) = -(2i)^{n_0} \quad \text{, ومنه ,}$$

$$|(z-i)||d+ip| = |-(2i)^{n_0}| \quad \text{إذن :}$$

$$\sqrt{5} \sqrt{d^2+p^2} = 2^{n_0} \quad \text{أي :}$$

$$5(d^2+p^2) = 2^{2n_0} \quad \text{ومنه :}$$

$$[5] \quad 2^{2n_0} = 0 \quad \text{وهذا تناقض , وذلك حسب السؤال (3)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad z_n \neq 1 \quad \text{وبالتالي :}$$

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد متجهين (\vec{u}, \vec{v})

29

نعتبر المجموعة : $E = \{m(z) \mid (z-1)(\bar{z}-1) = 4\}$

حدد طبيعة المجموعة (E) وعناصرها المميزة .

الجواب : لدينا .

$$m(z) \in (E) \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = 4$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(\overline{z-1}) = 4$$

$$\Leftrightarrow |z-1|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow |z-1| = 2 \quad (\text{A: النقطة ذات الحق 1})$$

$$\Leftrightarrow AM = 2$$

ومنه (E) هي الدائرة التي مركزها $A(1,0)$ ، شعاعها $R=2$.

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد متجهين (\vec{u}, \vec{v})

30

(1) حدد مجموعة النظم M التي لحقها z التي تحقق :

$$|1-z| = |1-\bar{z}|$$

(2) حدد مجموعة النظم M التي تحقق z التي تحقق :

$$(1-z)(1-\bar{z}) \in \mathbb{R} \quad -\text{أ-}$$

$$(1-z)(1-\bar{z}) \in i\mathbb{R} \quad -\text{ب-}$$

الجواب : (1) لنكن : $E = \{m(z) \mid |1-z| = |1-\bar{z}|\}$

نعتبر نقطتين : $A(1)$ و $B(1)$

$$m(z) \in E \Leftrightarrow |z-1| = |z-\bar{1}|$$

$$\Leftrightarrow AM = BM$$

ومنه E هو واسط القطعة $[AB]$.

(2) لنكن $F = \{m(z) \mid (1-z)(1-\bar{z}) \in \mathbb{R}\}$

نضع : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ حيث : $z = x + iy$

$$(1-z)(1-\bar{z}) = 1 - (1+i)z + i^2 z^2$$

$$= 1 - (1+i)(x+iy) + i(x+iy)^2$$

$$= 1 - x - iy - iz + y + iz^2 - iy^2 - 2xy$$

$$(1-z)(1-\bar{z}) = (1-x+y-2xy) + i(x^2-y^2-x-y) \quad \text{ومن هنا :}$$

$$(1-z)(1-\bar{z}) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - y^2 - x - y = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+y=0 \quad \text{أو} \quad x-y-1=0$$

ومن هنا (F) هي اتحاد مستقيمين : (D) : $x+y=0$ و (Δ) : $x-y-1=0$

$$H = \{m(z) \mid (1-z)(1-\bar{z}) \in i\mathbb{R}\} \quad \text{ب- لتكن}$$

$$m(z) \in H \Leftrightarrow (1-z)(1-\bar{z}) \in i\mathbb{R} \quad \text{لدينا .}$$

$$\Leftrightarrow 1-x+y-2xy = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1-x}{2x-1}$$

$$y = \frac{1-x}{2x-1} \quad \text{ومن هنا (H) هو المدلول الذي معا دلته :}$$

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعاود عمتهم $(0, \vec{u}, \vec{v})$

31

$$\begin{cases} |z| = |z-1| \\ \arg z = \arg(z+i) \pmod{2\pi} \end{cases} \quad \text{1- حدد العدد العقدي } z \text{ الذي يعطى :}$$

$$\begin{aligned} & \text{2- حدد مجموعة النقط } M \text{ التي لعقما } z \text{ التي يعطى} \\ & |z| = |z-1| \quad \text{(ناقش حسب قيم } k) \end{aligned}$$

الجواب : لتكن M نقطة من المستوى لحنما z و A النقطه التي لعقما 2

$$|z| = |z-1| \Leftrightarrow OM = AM \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow M \text{ تنتمي إلى واسطه القطعه } [OA]$$

$$\text{واسطه القطعه } [OA] \text{ معادلته : } x=1 \quad (\Delta)$$

$$\text{ولتكن } z \text{ النقطه التي لعقما } z-1-3-i$$

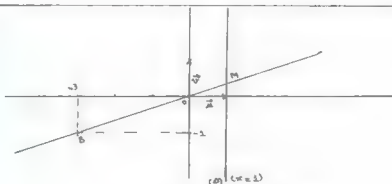
$$\arg z = \arg(\vec{u}, \vec{OM}) \pmod{2\pi} \quad \text{لدينا ،}$$

$$\arg(z+i) = \arg(\vec{u}, \vec{BM}) \pmod{2\pi}$$

$$\arg z = \arg(z+i) \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{OM}) = (\vec{u}, \vec{BM}) \pmod{2\pi} \quad \text{إذن : (4)}$$

$$\Leftrightarrow \text{نصفى المستقيمين } [OM] \text{ و } [BM] \text{ متطابقين}$$

$$\begin{cases} |z| = |z-1| \\ \arg z = \arg(z+i) \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \text{والتالي : } M \text{ تنتمي إلى التقاطع } (\Delta) \text{ و } (OB)$$



(2) لنكن: $E = \{ M(z) \mid z + \bar{z} = k |z|^2 \}$

نضع: $z = x + iy$ ، بحيث: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

لدينا، $M(z) \in E \Leftrightarrow z + \bar{z} = k |z|^2 \Leftrightarrow 2x = k \sqrt{x^2 + y^2}$

* إذا كان: $k = 0$ ، فإن: $x = 0$ ، ومنه E هو محور التخيل.

* إذا كان: $k \neq 0$.

لدينا، $2x = k \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = k^2 (x^2 + y^2) \\ kx \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (4 - k^2)x^2 = k^2 y^2 \\ kx \geq 0 \end{cases}$

- إذا كان: $4 - k^2 < 0$ ، فإن $k^2 y^2 < 0$ غير ممكن، ومنه: $E = \emptyset$

- إذا كان: $4 - k^2 > 0$ ، أي: $-2 \leq k \leq 2$

$M(z) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} |y| = \frac{x}{k} \sqrt{4 - k^2} \\ kx \geq 0 \end{cases}$ ، فإن

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{4 - k^2}}{k} x \text{ أو } y = -\frac{\sqrt{4 - k^2}}{k} x \\ kx \geq 0 \end{cases}$

وبالتالي، E هو اتحاد خطين مستقيمان معادلتها:

$(\Delta_1): \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{4 - k^2}}{k} x \\ kx \geq 0 \end{cases}$; $(\Delta_2): \begin{cases} y = \frac{\sqrt{4 - k^2}}{k} x \\ kx \geq 0 \end{cases}$

المسئول القدي (3) منسوب إلى معلم متفاد معلوم (3, 2, 1)

لتكن النظم A و B و C التي ألقاها م و ط و ع على التوالي.

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{1}{2} (a\bar{b} + \bar{a}b) \quad (1) \text{ بـ أن :}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2} [(c-a)(\bar{b}-\bar{a}) + (\bar{c}-\bar{a})(b-a)] \quad \text{بـ استنتج أن :}$$

$$\det(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{i}{2} (a\bar{b} - \bar{a}b) \quad (2) \text{ بـ أن :}$$

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{i}{2} [(c-a)(\bar{b}-\bar{a}) - (\bar{c}-\bar{a})(b-a)] \quad \text{بـ استنتج أن :}$$

$$\text{نضع : } a = R_1 e^{i\theta_1} \quad ; \quad b = R_2 e^{i\theta_2} \quad \text{حيث : } R_1 > 0, R_2 > 0$$

$$\text{حدد } \vec{OA} \cdot \vec{OB} \quad \text{و} \quad \det(\vec{OA}, \vec{OB}) \quad \text{بدلالة } R_1, R_2, \theta_1, \theta_2$$

(4) نفسك : حدد مجموعة النظم $M(\mathbb{Z})$ بحيث تكون النظم :

$$A(z) \quad ; \quad M(\mathbb{Z}) \quad ; \quad C(1+z^2) \quad \text{مستقيمة.}$$

$$\text{الاجاب : (1) بـ أن :} \quad \begin{aligned} (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 & \quad ; \quad a = x_1 + iy_1 \\ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 & \quad ; \quad b = x_2 + iy_2 \end{aligned}$$

$$\bar{a}b = x_1x_2 + y_1y_2 - i(x_1y_2 - y_1x_2) \quad \text{لدينا :}$$

$$\bar{a}b = x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_1y_2 - y_1x_2)$$

$$\bar{a}b + \bar{a}b = 2(x_1x_2 + y_1y_2) \quad \text{ومنه :}$$

$$\frac{1}{2} (\bar{a}b + \bar{a}b) = x_1x_2 + y_1y_2 \quad \text{إذن :}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{1}{2} (\bar{a}b + \bar{a}b) \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\vec{AB} = \vec{OK} \quad \text{و} \quad \vec{AC} = \vec{OL} \quad \text{بـ لتكن L و K نقطتين من (L) بحيث :}$$

$$\text{لدينا لحق K هو } a-b \quad \text{ولحق L هو } c-a$$

ومنه حسب السؤال (1) -

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{OL} \cdot \vec{OK} = \frac{1}{2} [(c-a)(\bar{b}-\bar{a}) + (\bar{c}-\bar{a})(b-a)]$$

$$\frac{1}{2} (\bar{a}b - \bar{a}b) = -i(x_1y_2 - y_1x_2) \quad (2) \text{ 1- لدينا :}$$

$$\frac{i}{2} (\bar{a}b - \bar{a}b) = x_1y_2 - x_2y_1$$

$$\det(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{i}{2} (\bar{a}b - \bar{a}b) \quad \text{ومنه :}$$

$$\vec{AB} = \vec{OK} \quad \text{و} \quad \vec{AC} = \vec{OL} \quad \text{بـ نضع :}$$

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \det(\vec{OK}, \vec{OL}) = \frac{i}{2} [(c-a)(\bar{b}-\bar{a}) - (\bar{c}-\bar{a})(b-a)]$$

(3) لدينا : $b = R_2 e^{i\theta_2}$ و $a = R_1 e^{i\theta_1}$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{1}{2} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{2} [R_1 R_2 e^{i\theta_1} \cdot e^{-i\theta_2} + R_1 R_2 e^{-i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}]$$

$$= \frac{1}{2} R_1 R_2 (e^{i(\theta_1 - \theta_2)} + e^{-i(\theta_1 - \theta_2)})$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = R_1 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad \text{منه،}$$

$$\det(\vec{OA}; \vec{OB}) = \frac{i}{2} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\det(\vec{OA}, \vec{OB}) = R_1 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad \text{منه،}$$

(4) النقطة $A(1)$ و $M(z)$ و $(1+z^2)$ مستقيمة بيكافي:

$$\det(\vec{AC}, \vec{AB}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} [(1+z^2-1)(\bar{z}-1) - (1+\bar{z}^2-1)(z-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2(\bar{z}-1) - \bar{z}^2(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2(\bar{z}-1) - \overline{z^2(\bar{z}-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z^2(\bar{z}-1)) = 0$$

نضع : $z = x + iy$ حيث : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$z^2(\bar{z}-1) = (x^2 - y^2 + i2xy)(x-1 - iy)$$

$$\operatorname{Im}(z^2(\bar{z}-1)) = (x^2 - y^2)(x-1) + 2xy^2 - [(x^2 - y^2)y - 2xy(x-1)]$$

$$\operatorname{Im}(z^2(\bar{z}-1)) = 0 \Leftrightarrow y(x^2 - y^2) - 2xy(x-1) = 0 \quad \text{منه،}$$

$$\Leftrightarrow y(x^2 - y^2 - 2x^2 + 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \quad \text{أو} \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

منه مجموعة $M(z)$ يجب أن تكون النقطة $A(1)$ و $M(z)$ و $(1+z^2)$ مستقيمة هي اتحاد المستقيم (D) الذي معادلته $y = 0$ والدائرة (C) التي مركزها $(1, 0)$ وبنصفها $R=1$.

المستوى العقدي مسنوب إلى معلم متعامد منظم $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$

33

ليكن \mathbb{C} عدد عقدي و m صورة \mathbb{C} .

نفع : $\mathbb{C} = \frac{3-i}{3+i}$ و m صورة \mathbb{C} .

$$\frac{z+i}{z-i} = i \frac{3+i}{3-i} \quad (1) \text{ بين أن :}$$

(1) ليكن (P_1) نصف المستوى المعروف بـ : $y \geq 0$.

بين أنه إذا كانت m تنتمي إلى (P_1) فإن m تنتمي أيضاً إلى (P_2) .

(3) ليكن $k \in \mathbb{R}^+$ و (P_2) مجموعة النقط m لعفا \mathbb{C} التي تحقق :

$$|z| = \left| \frac{3-i}{3+i} \right| = k$$

حدد طبيعة (P_2) و (P_1) وأنشئهما.

الجواب : (1) ليكن \mathbb{C} عدداً ، لدينا : $z = \frac{3-i}{3+i}$

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{\frac{3-i}{3+i} + i}{\frac{3-i}{3+i} - i} = \frac{3(1+i) - (1-i)}{3(1-i) - (1+i)} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{1+i}{1-i} \times \frac{3 - \frac{1-i}{1+i}}{3 - \frac{1+i}{1-i}}$$

$$\frac{1+i}{1-i} = +i \quad \text{و} \quad \frac{1-i}{1+i} = -i \quad \text{بمائل ،}$$

$$\frac{z+i}{z-i} = i \frac{3+i}{3-i} \quad \text{فيان}$$

$$z = \frac{3-i}{3+i} = \frac{(3-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} \quad (2) \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{3\bar{3} - 1 + (3-\bar{3})}{13+1^2}$$

$$z = \frac{|3|^2 - 1}{|3+i|^2} + 2i \frac{\Re(3)}{|3+i|^2} \quad \left(\begin{array}{l} 3-\bar{3} = 2i\Im(3) \\ 3\bar{3} = |3|^2 \end{array} \right)$$

إذا كانت : $m(3) \in (P_2)$ فيان : $\Re m(3) \geq 0$

وبالمثل : $\Re m(z) = \frac{2\Re(3)}{|3+i|^2}$ فيان : $\Re m(z) \geq 0$ ومنه : $m(\mathbb{C})$ تنتمي إلى (P_2) .

(3) ليكن A, B التمثيلتان للثلاثين لخطهما 1 و -1 على التوالي.

لدينا: $m(z) \in (E_2) \Leftrightarrow \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1 \quad \bar{z} + 1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow |z-1| = |z+1| \quad \bar{z} \neq -1$$

$$\Leftrightarrow A_m = B_m \quad \bar{z} \neq -1$$

ومن (E2) هي واسط القطعة [AB] محور الترتيب.

لدينا: $m(z) \in (E_2) \Leftrightarrow \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 2 \quad \bar{z} + 1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow |z-1| = 2|z+1| \quad \bar{z} \neq -1$$

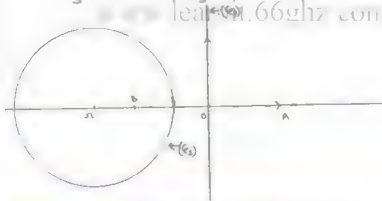
$$\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = 4(z+1)(\bar{z}+1)$$

$$\Leftrightarrow 3\bar{z} + 5(z+\bar{z}) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2) + 10x + 3 = 0 \quad \begin{matrix} \text{نضع:} \\ z = x + iy \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{5}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

ومن (E2) هي الدائرة التي مركزها $(-\frac{5}{3}, 0)$ شعاعها $R = \frac{4}{3}$.



ليكن f التماثل المبرمج من $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ نحو $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

34

$$z \mapsto z' = f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

بمبايلي

(1) أحسب $|z|$ و z' إذا كان $z = i$ أو $z = -i$

(2) حدد f محور الحقيقي بالتمثيل f

(3) حدد صورة العنصر $D = \{m(z) | m'(z) \neq 0\}$ بالتمثيل f

الجواب : (1) حساب $|z|^2$:
 لدينا : $|z|^2 = z\bar{z} = \frac{z-i}{z+i} \times \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} = \frac{z\bar{z} + i(z-\bar{z}) + 1}{z\bar{z} - i(z-\bar{z}) + 1}$

بما أن : $z\bar{z} = |z|^2$ و $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$

فإن : $|z|^2 = \frac{|z|^2 - 2 \operatorname{Im}(z) + 1}{|z|^2 + 2 \operatorname{Im}(z) + 1}$

(2) صور المحور الحقيقي بالتطبيق f .

لدينا : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = \frac{|z|^2 + 1}{|z|^2 + 1} = 1$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$

صورة المحور الحقيقي ب f هي الدائرة (C) التي مركزها 0، شعاعها $R=1$ ومعروفة من النقطة $A(1,0)$.

(3) صورة D بالتطبيق f .

لدينا : $w(z) \in (D) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow |z|^2 < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$

صورة (D) بالتطبيق f هي قرص الدائرة (C) التي مركزها 0، شعاعها $R=1$ والمعروف من الدائرة (C).

لكن A، B، و C ثلاثة نغلم ألحافها A و B و C على التوالي.

35

(1) يبين أن النقط A، B، و C مستقيمة إذا و فقط إذا كان

$$a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{a}-\bar{b}) = 0$$

(2) لكن A، B، و C نغلمب حلقب

حدد سرهم لأرم، وكاذ على C، و C لكي يكون النقطه M لحقها C تنتمي إلى المستقيم (AB).

بين أنه إذا كان $|a|=|b|=1$ فإن هذه العلاقة تكسب :

$$z + ab\bar{z} - (a+b) = 0$$

الجاب : (1) $\vec{CA} = k\vec{CB} \quad |k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow B=C$ أو

$$\Leftrightarrow b=c \quad \text{أو} \quad (a-c) = \frac{a-c}{b-c} (b-c) \quad |k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow b=c \quad \text{أو} \quad \frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$$

$$\text{النقطة } A, B, C \text{ مستقيمة} \Leftrightarrow b=c \text{ أو } \frac{a-c}{b-c} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}$$

$$\Leftrightarrow b=c \text{ أو } (a-c)(\bar{b}-\bar{c}) = (\bar{a}-\bar{c})(b-c)$$

$$\text{النقطة } A, B, C \text{ مستقيمة} \Leftrightarrow a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{a}-\bar{b}) = 0 \quad (1)$$

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \text{النقطة } A, B, M \text{ مستقيمة} \quad (2)$$

$$(c=z) \Leftrightarrow a(\bar{b}-\bar{z}) + b(\bar{z}-\bar{a}) + z(\bar{a}-\bar{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\bar{a}-\bar{b})z - (a-b)\bar{z} + a\bar{b} - b\bar{a} = 0 \quad (2)$$

ملاحظة: إذا كانت $b=0$ (أصل المعلم فيان):

$$(a \neq 0) \quad \bar{a}z - a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow A \text{ و } M \text{ مستقيمتان}$$

$$\frac{z}{a} = \frac{\bar{z}}{\bar{a}} \Leftrightarrow$$

$$\text{إذا كان } |a|=|b|=1 \text{ فيان: } a\bar{a} = b\bar{b} = 1 \quad \text{أي: } \bar{a} = \frac{1}{a} \text{ و } \bar{b} = \frac{1}{b}$$

$$\text{ومن: } \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)z - (a-b)\bar{z} + \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow (b-a)z - ab(a-b)\bar{z} + a^2 - b^2 = 0$$

$$(a \neq 0) \Leftrightarrow z - ab\bar{z} + a - b = 0 \quad (4)$$

www.ghz.com

36

(1) المستوى العددي مرسوم، المعلم معامد منتهى $(0, \vec{u}, \vec{v})$

حدد المجموعة (E) للنقطة M ذات الإحداثيات z بحيث: $|z-1| = |\bar{z}+1|$ (4)

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة: $(z-1)^n = (\bar{z}+1)^n$ (2) $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$M(z) \in (E) \Leftrightarrow |z-1| = |\bar{z}+1| \quad \text{الجواب: (1) لوينا.}$$

$$\Leftrightarrow |z-1| = |\bar{z}+1|$$

$$\Leftrightarrow |z-1| = |z+1| \quad \left(\begin{array}{l} \text{كل } z \text{ من } \mathbb{C} \\ \text{أن: } |1/3| = |1/3| \end{array} \right)$$

نكتب A و B النقطتين ألتامهما 1 و -1 على التوالي

$$M(z) \in (E) \Leftrightarrow AM = BM \quad \text{إذاً،}$$

ومن (E) هي واسطه القطعة $[AB]$ أي: محور الترتيب (المعور التمثيل) (الفرق)

$$(2) \text{ لنحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة: } (z-1)^n = (\bar{z}+1)^n \quad (4)$$

$$\text{لدينا: } (z-1)^n = (\bar{z}+1)^n \quad \text{وإذاً: } |z-1|^n = |\bar{z}+1|^n$$

$$\text{ومن: } |z-1| = |\bar{z}+1| \quad \text{منه المثال (1) لوينا: } z \in \mathbb{R}$$

$$\exists y \in \mathbb{R} : z = iy$$

ومنه:

$$(2) \Leftrightarrow (iy-1)^n = (-iy+1)^n$$

اذن:

$$\Leftrightarrow (iy-1)^n = (-1)^n (iy-1)^n$$

$$\Leftrightarrow 1 = (-1)^n$$

١٠١. كان n زوجي فإن العلاقة الأخيرة صحيحة لكل y من \mathbb{R} ، ومنه $z = iy$.

$$\mathbb{S} = i\mathbb{R}$$

ومنه:

إذا كان n فردي فإن العلاقة الأخيرة غير صحيحة

$$\mathbb{S} = \emptyset$$

ومنه:

المسوى العقدي \mathbb{S} منسوب إلى معلم ضعائم مختلف $(0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

37

لتكن A و B صورتين نموذجيتين على التوالي

ليكن ϕ التمثيل المعروف من $\{A\} \rightarrow \mathbb{C}$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$

$$z = \frac{z-1}{z+1}$$

بجانب $z+1$ بالنقطة $M'(z')$ ، حيث:

$$z' = \frac{z+1}{z-1}$$

$$z' = \frac{z+1}{z-1}$$

١. نلاحظ z, z' لمبار، وعمدة للعدد العقدي z .

أول مبدئي z و z' باستعمال M و A .

$$(z'+1)(z-1) = 1$$

ج- نلاحظ z, z' لمبار وعمدة العدد العقدي $z+1$.

عبر عن z' و z بدلالة z و z' .

أول مبدئي z' و z باستعمال M' و A .

(2) لتكن (\mathcal{C}) الدائرة التي مركزها A و شعاعها 1 .

١- من أنه إذا كان $M \in (\mathcal{C})$ فإن M' صورته M' في التمثيل إلى دائرة.

(3) مركزها B ويتم تحديد شعاعها.

ب- هل الدائرة (\mathcal{C}) هي صورة الدائرة (\mathcal{C}) بالتمثيل ϕ ؟

$$(4) \text{ لتكن } T \text{ النقطة ذات الإحداثيات } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right)$$

١- أحسب نصف المحيط AT ، واستنتج أن $T \in (\mathcal{C})$.

ب- حدد بالرموز قياساً للزاوية \widehat{BAT} (أسمي الدائرة (\mathcal{C}) والنقطة T).

ج- باستعمال الأشكال المتشابهة، استنتج أن صورة T هي B .

الجواب : (أ) لدينا : $w' = \frac{2z-i}{iz+1}$ ($z \neq i$)

أ- لدينا : $M(z)$ و $A(z)$

ومنه : $r = |z-i| = AM$

$\theta = \arg(z-i) \equiv (\vec{AM}, \vec{AM'})$ $[2\pi]$

ب- لدينا : $(z'+2i)(z-i) = \left(\frac{2z-i}{iz+1} + 2i\right)(z-i)$

$= \frac{2z-i-2z+2i}{iz+1} (z-i) = \frac{i(z-i)}{iz+1} = \frac{iz+1}{iz+1}$

ومنه : $(z'+2i)(z-i) = 1$

ج- بمثل : $(z'+2i)(z-i) = 1$

فيكون : $\arg(z'+2i) + \arg(z-i) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ و $|z'+2i||z-i| = 1$

أي : $\theta' + \theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ و $r' r = 1$

ومنه : $\theta' = -\theta \equiv (\vec{AM}, \vec{AM'})$ $[2\pi]$ و $r' = \frac{1}{r} = \frac{1}{AM}$

(2) أ- إذا كانت $M \in (C)$ فيكون $AM = r = 1$ ومنه $AM' = \frac{1}{r} = 1$

وبالتالي M' تنتمي إلى الدائرة (C') التي مركزها B، ونلاحظ أنها (C) نفسها.

ب- عكسًا، إذا كانت $M'(z') \in (C')$ فيكون $|z'+2i| = 1$

لنبحث عن $M(z)$ بحيث : $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$

$\Leftrightarrow izz' + z' = 2z - i \Leftrightarrow z(iz' - 2) = -z' - i$

$\Leftrightarrow z = \frac{-z'-i}{iz'-2}$ ($z' \neq 2i$)
 $M' \neq B$

بمثل : $AM = r = \frac{1}{r'} = 1$ فيكون $r' = 1$

ومنه : $M(z) \in (C)$ و $M'(z') \in (C')$

وبالتالي : $f(C) = (C)$ و $f(C') = (C')$ و $f(C) \subset f(C')$ و $f(C') \subset f(C)$

(3) لحق المتجه \vec{AT} هو : $\frac{\sqrt{2}}{2} + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})i - i = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\|\vec{AT}\| = |e^{i\frac{\pi}{4}}| = 1$

ومنه : $T \in (C)$

$$(\vec{u}, \vec{A}) = \arg(e^{i\frac{\pi}{4}}) [2\pi]$$

ب- ليس،

$$\equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$(\vec{u}, \vec{B}') = -(\vec{u}, \vec{A}) [2\pi], \quad B' = 1 \quad \text{لذا: } T' = f(T) \quad \text{و } \omega = 2\pi f$$

$$(\vec{u}, \vec{B}') = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \quad ; \quad B' = 1 \quad \text{ومنه:}$$

$$(\vec{u}, \vec{B}') = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \quad ; \quad B' \in (0) \quad \text{وبالتالي:}$$



المسوى العددي منسوب إلى المعلم متعامد مع $(0, \vec{u}, \vec{v})$

38

بعبارة البنية A و B و C محيطات متشابهة، متى لحاقها على التوالي a و b و c

(1) تكون M نقطة لعلها z غير من z بدلالة z:

أ- لعل M' صورة M بالدوران الذي مركزه A و زاوية $\frac{\pi}{3}$.

ب- لعل M'' صورة M بالدوران الذي مركزه A و زاوية $-\frac{\pi}{3}$.

(2) ماذا يمكن أن نقول عن المثلث ABC إذا كانت الأعداد العقدية

$$a, b, c \text{ تحقق: } \frac{c-a}{b-a} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \quad \text{أ-}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \quad \text{ب-}$$

(3) أثبت أن المثلث ABC متساوي الأضلاع إذا وقع أحد أقطاب

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

الجواب: (1) نعم: (2) لا: (3) نعم: (4) لا: (5) نعم: (6) لا: (7) نعم: (8) لا: (9) نعم: (10) لا:

$$z_2(m) = m' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow z' - a = e^{i\frac{\pi}{3}} (z - a)$$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + a(1 - e^{i\frac{\pi}{3}})$$

$$z_2(m) = m' \Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + a\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2(m) = m'' \Leftrightarrow z' - a = e^{-i\frac{\pi}{3}} (z - a) \quad \text{و- لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z + a(1 - e^{-i\frac{\pi}{3}})$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + a\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) \quad \text{فإن :} \quad \frac{c - a}{b - a} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \quad \text{أ- إذا كان :}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \text{و} \quad AC = AB \quad \text{أي :} \quad z_2(B) = C \quad \text{منه :}$$

وبالتالي : $\triangle ABC$ مثلث متساوي الأضلاع مباشر.

$$c - a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - a) \quad \text{فإن :} \quad \frac{c - a}{b - a} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} \quad \text{ب- إذا كان :}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \text{و} \quad AC = AB \quad \text{أي :} \quad z_2(B) = C \quad \text{ومنه :}$$

وبالتالي : $\triangle ABC$ مثلث متساوي الأضلاع غير مباشر.

3) لدينا : $\triangle ABC$ مثلث متساوي الأضلاع وإذا فقط إذا كان :

$$\frac{c - a}{b - a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{أو} \quad \frac{c - a}{b - a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c - a}{b - a} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أو} \quad \frac{c - a}{b - a} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c - a}{b - a} - \frac{1}{2} = i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أو} \quad \frac{c - a}{b - a} - \frac{1}{2} = -i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c - a}{b - a} - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2c - a - b)^2}{4(b - a)^2} = -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow (2c - a - b)^2 = -3(b - a)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 4c^2 - 4ac - 4cb + 2a = -3b^2 - 3a^2 + 6ab$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 = 4ab + 4bc + 4ca$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

وبالتالي : $\triangle ABC$ مثلث متساوي الأضلاع $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

$$z^2 - (1-2i)z + 1-7i = 0 \quad \text{حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة :}$$

39

الجواب : لنحل في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - (1-2i)z + 1-7i = 0$ (E)

لدينا : مميز المعادلة (E) $\Delta = (1-2i)^2 - 4(1-7i)$

$$\Delta = -7 + 24i$$

ليكن $\sigma = x+iy$ جذر مربع لـ Δ أي : $\Delta = \sigma^2$ (حيث $(x,y) \in \mathbb{R}^2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{7^2 + 24^2} \\ x^2 - y^2 = -7 \\ 2xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{-7 + \sqrt{49 + 576}}{2} = \frac{-7 + 25}{2} = 9 \\ y^2 = \frac{-7 + \sqrt{49 + 576}}{2} = \frac{-7 + 25}{2} = 16 \\ 2xy = 24 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$\text{إذن : } \sigma_2 = -3-4i \quad \text{و} \quad \sigma_1 = 3+4i$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي :

$$z_2 = \frac{1-2i-3-4i}{2} = -1-3i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{1-2i+3+4i}{2} = 2+i$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{2+i; -1-3i\}$

$$(-4-2i)z^2 + (7-i)z + 1+3i = 0 \quad \text{حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة :}$$

40

الجواب : لدينا : (E) $(-4-2i)z^2 + (7-i)z + 1+3i = 0$

مميز هذه المعادلة هو : $\Delta = (7-i)^2 + 4(1+3i)(4+2i)$

$$\Delta = 40 + 42i$$

ليكن $\sigma = x+iy$ جذر مربع لـ Δ أي : $\Delta = \sigma^2$ (حيث $(x,y) \in \mathbb{R}^2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{40^2 + 42^2} \\ x^2 - y^2 = 40 \\ 2xy = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 49 \\ y^2 = 9 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=-7 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$\sigma_2 = -7-3i \quad \text{و} \quad \sigma_1 = 7+3i$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي :

$$z_2 = \frac{-7+i-7-3i}{2(-4-2i)} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-7+i-7-3i}{2(-4-2i)}$$

$$z_2 = -\frac{1}{2+i} = -\frac{1+2i}{5} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{7+i}{4+2i} = \frac{3-i}{2}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \left\{ -\frac{1+2i}{5}; \frac{3-i}{2} \right\}$

(E) $z^2 - (2^{0+1} \cos \theta)z + 2^{2\theta} = 0$ حل في \mathbb{C} المعادلة :

41

حيث θ عدد حقيقي معلوم .

(2) لنك A و B محور حلول المعادلة (E) في المستوى العقدي المنسوب إلى

معلم متعامد صفتهم $(0, 2^{0+1}, \frac{\pi}{2})$

حدد θ التي من أجلها يكون المثلث OAB متساوي الأضلاع .

(E) $z^2 - (2^{0+1} \cos \theta)z + 2^{2\theta} = 0$ لدينا

$$\Delta = (2^{0+1} \cos \theta)^2 - 4 \times 2^{2\theta} = 2^{2\theta+2} (\cos^2 \theta - 1)$$

$$\Delta = -2^{2\theta+2} \sin^2 \theta = (-2^{0+1} \sin \theta)^2$$

ومنه $\sigma = \pm 2^{0+1} \sin \theta$ جذور مع Δ

إذاً حلول المعادلة (E) هما :

$$z_2 = \frac{2^{0+1} \cos \theta - i 2^{0+1} \sin \theta}{2}$$

$$z_1 = \frac{2^{0+1} \cos \theta + i 2^{0+1} \sin \theta}{2}$$

$$z_2 = \frac{2^0 (\cos \theta - i \sin \theta)}{2^0 e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$z_1 = \frac{2^0 (\cos \theta + i \sin \theta)}{2^0 e^{i\theta}} = e^{i\theta}$$

$S = \{2^0 e^{-i\theta}, 2^0 e^{i\theta}\}$ ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

(2) المثلث OAB متساوي الساقين لأن $OA = OB = 2^0$

ومع OAB متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \pm \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$

$$\Leftrightarrow 2\theta \equiv \pm \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \theta \equiv \pm \frac{\pi}{6} \pmod{\pi}$$

OAB متساوي الأضلاع $\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ أو $\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad | k \in \mathbb{Z}$

(E) $z^2 + 2(1 - \cos \theta)z + 2(1 - \cos \theta) = 0$ حل في \mathbb{C} المعادلة :

42

حيث θ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0, \pi]$

(2) حدد معيار وقيمة كل حل للمعادلة (E).

(E) $z^2 + 2(1 - \cos \theta)z + 2(1 - \cos \theta) = 0$

الجواب : (1) لدينا :

$$\Delta' = (1 - \cos \theta)^2 - 2(1 - \cos \theta)$$

مميز هذه المعادلة :

$$\Delta' = -(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) = -\sin^2 \theta \quad \text{لأن } \theta$$

$$\Delta' = (\pm i \sin \theta)^2$$

وهنا $\sigma = \pm i \sin \theta$ جذر مربع Δ لأن حلول المعادلة (E) هي

$$z_1 = \frac{-1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1} \quad z_2 = \frac{-1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1}$$

لأن مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S = \{-1 + \cos \theta - i \sin \theta, -1 + \cos \theta + i \sin \theta\}$

(e) لتعدد معيار وعمدة لكل من z_1 و z_2 .

$$z_1 = -(1 - \cos \theta) + i \sin \theta = -2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{لأن:}$$

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(-\sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$z_1 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

• إذا كان $\theta = 0$ ، فإن: $z_1 = z_2 = 0$

• إذا كان: $\theta \in]0, \pi[$ ، فإن: $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ، لأن: $\sin \frac{\theta}{2} > 0$

$$|z_1| = |z_2| = 2 \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{وهنا:}$$

$$\arg z_1 = \frac{\theta + \pi}{2} \quad [2\pi]$$

$$\arg z_2 = -\frac{\theta + \pi}{2} \quad [2\pi]$$

حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^4 + (3-6i)z^2 + 2(16-63i) = 0$ (E)

43

الجواب: لدينا: (E) $z^4 + (3-6i)z^2 + 2(16-63i) = 0$

$$z = z^2 \quad \text{نضع}$$

لأن المعادلة (E) تكافئ: $z^2 + (3-6i)z + 2(16-63i) = 0$ (E')

$$\Delta = -155 + 468i \quad \text{ميز هذه المعادلة:}$$

$$\sigma_2 = -13 - 18i \quad \sigma_1 = 13 + 18i \quad \text{الجذور المربعة لـ } \Delta \text{ هي:}$$

وهنا حلول المعادلة (E') هي:

$$z_2 = \frac{-3+6i-13-18i}{2} = -8-6i \quad z_1 = \frac{-3+6i+13+18i}{2} = 5+12i$$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E).

إذن : $z \in S \Leftrightarrow z^2 = -8-6i$ أو $z^2 = 5+12i$

الجذور المربعة للعدد $5+12i$ هما : $3+2i$ و $-3-2i$

الجذور المربعة للعدد $-8-6i$ هما : $1-3i$ و $-1+3i$

وبالتالي : $S = \{-3-2i; 3+2i; -1+3i; 1-3i\}$

44

حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$ (E)

الجواب : لدينا : (E) : $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$

نضع : $z = z^3$ ، في المعادلة (E) نحصل : $z^2 + (2i-1)z - 1 - i = 0$ (E')

ميز المعادلة (E') هو : $\Delta = (2i-1)^2 + 4(1-i)$

$\Delta = 1$

ومنه حلول المعادلة (E') هي : $z_1 = 1-i$ و $z_2 = -i$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E)

لدينا :

$z \in S \Leftrightarrow z^3 = 1-i$ أو $z^3 = -i$

$\Leftrightarrow z^3 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ أو $z^3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z = e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$ أو $z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{i(-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})} / k \in [0, 2]$

ومنه : $S = \{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{7\pi}{6}}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\}$

45

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة : $2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i-1)z + 13i = 0$ (E)

(1) يثبت أن المعادلة (E) تقبل حلاً حقيقيًا z_0 ، نسم بحدده

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة (E).

الجواب : (1) ليكن λ عدد حقيقي حل المعادلة (E) يعني أن :

$2\lambda^3 - (1+2i)\lambda^2 + (25i-1)\lambda + 13i = 0$

$\Leftrightarrow (2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda) + i(-2\lambda^2 + 25\lambda + 13) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(2\lambda^2 - \lambda - 1) = 0 \\ -2\lambda^2 + 25\lambda + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \text{ أو } 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad (1) \\ -2\lambda^2 + 25\lambda + 13 = 0 \quad (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \text{ أو } \lambda = -\frac{1}{2} \text{ أو } \lambda = 1 \quad (1) \\ -2\lambda^2 + 25\lambda + 13 = 0 \quad (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}$ هو الحل الوحيد الذي يتحقق المعادلة (2)

ومنه : $\lambda = -\frac{1}{2}$ هو الحل الحقيقي للمعادلة (E).

(4) نضع : $P(z) = z^3 - (1+2i)z^2 + (25i+1)z + 13i = 0$

بما أن : $P(-\frac{1}{2}) = 0$ فإن : $P(z)$ يقبل القسمة على $(z + \frac{1}{2})$

و نحصل على : $P(z) = (z + \frac{1}{2})(z^2 - (1+i)z + 13i)$

لأن : $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}$ أو $z^2 - (1+i)z + 13i = 0$

لتحل في المعادلة (E') : $z^2 - (1+i)z + 13i = 0$

مميزها : $\Delta = (1+i)^2 - 52i = -50i$

$\Delta = (5(1-i))^2$

ومنه : $\sigma = 5(1-i)$ جذر مربع لـ Δ ومنه حلوا المعادلة (E') هي :

$z_1 = \frac{1+i-5+5i}{1} = -2+3i$ و $z_2 = \frac{1+i+5-5i}{2} = 3-2i$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{-\frac{1}{2}, -2+3i, 3-2i\}$

نعتبر في العدودة P المعرفة بما يلي :

46

$P(z) = (z-1)z^3 - (5z-11)z^2 - (43+1)z + 9+37z$

(1) بين أن المعادلة $P(z) = 0$ تعبر حلاً تحليلاً صريحاً يتم تبديله

(2) حدد الأعداد العقدية a و b و c بحيث $P(z) = (z-z_0)(az^2+bz+c)$

(3) حل في \mathbb{C} المعادلة : $P(z) = 0$

الجواب : (1) ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$ حلاً للمعادلة $P(z) = 0$

$(\lambda-1)(\lambda)^3 - (5\lambda-11)(\lambda)^2 - (43+1)(\lambda) + 9+37\lambda = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda^3 - 11\lambda^2 + \lambda + 9) + \lambda(\lambda^3 + 5\lambda^2 - 43\lambda + 37) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^3 - 11\lambda^2 + \lambda + 9 = 0 & (1) \\ \lambda^3 + 5\lambda^2 - 43\lambda + 37 = 0 & (2) \end{cases}$

نلاحظ أن 1 حل للمعادلتين (1) و (2) ومنه نحل تحليلي صريح للمعادلة

$P(z) = 0$ ومنه : $z_0 = 1$

(2) بما أن $P(1) = 0$ فإن $P(z)$ يقبل القسمة على $(z-1)$

وبعد إنجاز القسمة القليدية لـ $P(z)$ على $(z-i)$ نحصل على :

$$P(z) = (z-i)(z^2 + (i-1)z + (10-6i)z - 37+9i)$$

$$\text{وهنا : } a=i-1 \quad b=10-6i \quad c=-37+9i$$

(3) لنحل في \mathbb{C} المعادلة : $P(z)=0$

$$\text{لدينا : } (z-i)z^2 + (10-6i)z - 37+9i = 0 \quad \text{أو} \quad z-i=0 \Leftrightarrow z=i \quad \text{أو} \quad P(z)=0$$

$$\text{لنحل المعادلة : } (i-1)z^2 + (10-6i)z - 37+9i = 0 \quad (E)$$

$$\Delta' = (5-3i)^2 - (i-1)(-37+9i)$$

$$\Delta' = -12 + 16i$$

جذورها المربعة هما :

$$\sigma_2 = -2-4i \quad \text{و} \quad \sigma_1 = 2+4i$$

$$\text{إذن حلول المعادلة (E) هي : } z_4 = \frac{-5+3i+2+4i}{i-1} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-5+3i-2-4i}{i-1}$$

$$z_2 = \frac{-7-i}{i-1} = 3+4i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-3+7i}{i-1} = 5-2i$$

$$S = \{i, 3+4i, 5-2i\} \quad \text{و} \quad P(z)=0 \quad \text{في :}$$

$$\text{حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } \left(\frac{z+2i}{z-2i}\right)^3 + \left(\frac{z+2i}{z-2i}\right)^2 + \left(\frac{z+2i}{z-2i}\right) + 1 = 0$$

47

$$\text{الجواب : } \text{لنك } S \text{ مجموعة حلول المعادلة (E) ونضع } z = \frac{z+2i}{z-2i} \quad z \neq 2i$$

$$z \in S \Leftrightarrow z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad \text{أيضاً}$$

$$\Leftrightarrow z^2(z+1) + (z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+1)(z^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+1)(z-i)(z+i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \quad \text{أو} \quad z = -i \quad \text{أو} \quad z = i$$

$$z \in S \Leftrightarrow \frac{z+2i}{z-2i} = z \quad | \quad z \in \{-1, -i, i\}$$

$$\Leftrightarrow z+2i = z(z-2i) \quad | \quad z \in \{-1, -i, i\}$$

$$\Leftrightarrow z(1-z) = -2i(1+z) \quad | \quad z \in \{-1, -i, i\}$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \frac{z+1}{z-1} \quad | \quad z \in \{-1, -i, i\}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \quad \text{أو} \quad z = -2 \quad \text{أو} \quad z = 2$$

$$S = \{-2, 0, 2\} \quad \text{وبالتالي :}$$

حل في \mathbb{C} المعادلتين :

(1) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$

(2) $z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$

الاجواب : * لحل في \mathbb{C} المعادلة : (1) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$ نعتبر : $z = x + iy$ حيث : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 2ixy) - 2(x - iy) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 2x + 1) + i(2xy + 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \\ 2y(x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \text{ أو } z = -1 - 2i \text{ أو } z = -1 + 2i$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $S_1 = \{1, -1 + 2i, -1 - 2i\}$ * لحل في المعادلة : (2) $z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$ نعتبر كذلك : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $z = x + iy$

$$z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z| \Leftrightarrow (x + iy) + 3(x - iy) = (2 + i\sqrt{3})\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2iy = (2 + i\sqrt{3})\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow |4x - 2iy|^2 = |2 + i\sqrt{3}|^2 (x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 4y^2 = 7(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 3y^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = -\sqrt{3}x \text{ أو } y = \sqrt{3}x$$

$$\Rightarrow z = x(1 - \sqrt{3}i) \text{ أو } z = x(1 + \sqrt{3}i)$$

$$x(1 + \sqrt{3}i) + 3x(1 - \sqrt{3}i) = (2 + i\sqrt{3})|x|(1 + \sqrt{3}i) \quad \text{عكسًا ، لدينا :}$$

$$x(4 - 2i\sqrt{3}) = 2(2 + i\sqrt{3})|x|$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 + i\sqrt{3}}{2 - i\sqrt{3}}|x| \Leftrightarrow x = \frac{1 + 4i\sqrt{3}}{7}|x|$$

ومنه : $x(1 + \sqrt{3}i)$ ليس حلًا للمعادلة (2) إذا كان $x \neq 0$ * إذا كان $x = 0$ ، فإن : $z = 0$ حل للمعادلة (2)إذا كان $x = 0$ ، فإن $z = x(1 - \sqrt{3}i)$ حل لـ (2) فإن :

$$x(1-\sqrt{3}i) + 3x(1+\sqrt{3}i) = (2+i\sqrt{3})|x|(1-\sqrt{3}i)$$

$$\Leftrightarrow x(4+2i\sqrt{3}) = 2(2+i\sqrt{3})|x|$$

$$\Leftrightarrow x = |x| \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+$$

منه: $z = x(1-i\sqrt{3})$ حل للمعادلة (2) $x > 0$ كان $x \in \mathbb{R}^+$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (2) هي: $S_2 = \{x(1-i\sqrt{3}) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$

49

ليكن n عدد صحيح لمبيني غير منعدم، و θ عدد حقيقي.

$$\text{حل في } \mathbb{C}^2 \text{ للنظمة: } (S) \begin{cases} (z+x)^n + (z-x)^n = 2\cos\theta \\ z^2 + x^2 = 1 \end{cases} \quad (\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{C}^2$$

$$\text{الجواب: لدينا: } z^2 + x^2 = (z+x)(z-x)$$

$$\text{نضع: } u = z+x \quad v = z-x$$

$$(S') \begin{cases} u^n + v^n = 2\cos\theta \\ uv = 1 \end{cases} \quad \text{إذاً النظمة (S) تكافئ:}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^n = \frac{1}{u} \\ u^{n+1} - 2\cos\theta u + 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

$$1) \Leftrightarrow X^2 - 2\cos\theta X + 1 = 0 \quad \text{نضع: } X = u^n \quad \text{إذاً:}$$

$$\Leftrightarrow (X - \cos\theta)^2 = -\sin^2\theta$$

$$\Leftrightarrow X - \cos\theta = \pm i\sin\theta \quad \text{أو} \quad X - \cos\theta = -i\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow X = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \quad \text{أو} \quad X = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow u^n = e^{i\theta} \quad \text{أو} \quad u^n = e^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow u = e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \quad \text{أو} \quad u = e^{i(-\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \quad | k \in [0, n-1]$$

وبما أن: $v = \frac{1}{u}$ فإن مجموعة حلول النظمة (S) هي:

$$S' = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left\{ \left(e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, e^{-i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \right), \left(e^{-i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \right) \right\}$$

$$\begin{cases} u = z+x \\ v = z-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{u+v}{2} \\ x = \frac{u-v}{2} \end{cases} \quad \text{ولدينا:}$$

وبالتالي مجموعة حلول النظمة (S) هي:

$$S = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left\{ \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right), \left(\cos\left(-\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \sin\left(-\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right) \right\}$$

ليكن العدد العقدي : $z_0 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$

(1) نضع : $d = z_0 + z_0^4$ و $p = z_0^2 + z_0^3$

أ- بين أن : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ واستنتج أن : d و p هما

حلي المعادلة : $x^2 + x - 1 = 0$ (2)

ب- حدد α بدلالة $\cos \frac{2\pi}{5}$.

ج- حل في \mathbb{C} المعادلة (2) واستنتج قيمة $\cos \frac{2\pi}{5}$.

(2) لتكن A_0, A_1, A_2 و A_3, A_4 صور الأعداد العقدية $1, z_0, z_0^2, z_0^3$ و z_0^4 على التوالي في المستوى العقدي المصوب إلى معلم متعامد معلم $(0, \vec{u})$.

أ- لتكن H نقطة تقاطع المستقيم (A_1A_4) مع المحور $(0, \vec{u})$.
بين أن : $\overline{OH} = \cos \frac{2\pi}{5}$.

ب- لتكن (ع) الدائرة التي مركزها $A(-\frac{1}{2}, 0)$ والماردة من النقطة $B(i)$.

الدائرة (ع) تقطع المحور $(0, \vec{u})$ في نقطتين N و M .

(3) النقطة ذات الإحداثيات الموجب

بين أن : $\overline{ON} = p$ و $\overline{OM} = \alpha$ ، أ H منتصف القطعة $[OM]$.

الحواب : (1) 1- لدينا : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = \frac{1 - z_0^5}{1 - z_0}$ (2)

وبما أن : $z_0^5 = (\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5})^5 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

فإن : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$

ومنه : $1 + d + p = 0$ أي : $d + p = -1$

ولدينا : $dp = (z_0 + z_0^4)(z_0^2 + z_0^3) = z_0^3 + z_0^4 + z_0^6 + z_0^7$

وبما أن : $(z_0^5 = 1)$ فإن : $z_0^6 = z_0$ و $z_0^7 = z_0^2$

فإن : $d + p = z_0^3 + z_0^4 + z_0 + z_0^2 = -1$

إذن : $d + p = -1$ و $dp = -1$

ومنه : α و p هما حلي المعادلة : $x^2 - (\alpha + p)x + dp = 0$ أي : $x^2 + x - 1 = 0$

ب- لدينا : $\alpha = z_0 + z_0^4 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}$



(4) لدينا : مثلث متساوي الأضلاع

$$(\vec{BC}, \vec{BA}) \equiv (\vec{CA}, \vec{CB}) \quad [2\pi] \quad \text{يعني أن :}$$

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BC}{AC} \quad 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{c-b} = \frac{b-c}{a-c} \quad (4)$$

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{z}_1| = |\vec{z}_2| \\ \arg \vec{z}_1 = \arg \vec{z}_2 \quad [2\pi] \end{cases} \quad \text{معطيات مامة}$$

$$(4) \Leftrightarrow (a-b)(a-c) = (b-c)(c-b)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 + c^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$ABC \text{ مثلث متساوي المائتين في } A \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\vec{BC}, \vec{BA}) \equiv (\vec{CA}, \vec{CB}) \quad [2\pi] \end{cases} \quad (2) \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC} \\ (\vec{BC}, \vec{BA}) \equiv -(\vec{CB}, \vec{CA}) \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{c-b} = \frac{a-c}{b-c} \quad (4a)$$

$$\left(\begin{cases} |\vec{z}_1| = |\vec{z}_2| \\ \arg \vec{z}_1 = -\arg \vec{z}_2 \quad [2\pi] \end{cases} \right) \Leftrightarrow \vec{z}_1 = \vec{z}_2 \quad (4b)$$

$$(4a) \Leftrightarrow (a-b)(b-c) - (c-b)(a-c) = 0 \quad (4c)$$

$$ABC \text{ مثلث قائم الزاوية في } A \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\ (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases} \quad (3) \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad , \quad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = -\frac{\bar{c}-\bar{a}}{b-\bar{a}}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(c-\bar{a}) + (a-c)(b-\bar{a}) = 0$$

ليكن α عدداً حقيقياً من المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

نعتبر المعادلة في \mathbb{C} ذات المجهول z :

$$(E) : (1+iz)^3(1-itand) = (1-iz)^3(1+itan\alpha)$$

(أ) ليكن z_0 حلاً للمعادلة (E).

$$1 - \text{بين أن : } |1+iz_0| = |1-iz_0|$$

ب- استنتج أن z_0 عدد حقيقي.

$$(2) \text{ أ- احسب : } \frac{1+itan\alpha}{1-itand} \text{ بدلالة } e^{i\theta}$$

$$\text{ب- نضع : } z = \tan\theta \text{ حيث : } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

استنتج حلول المعادلة (E).

الجواب = (3) ليكن z_0 حلاً للمعادلة (E)

$$(1+iz_0)^3(1-itand) = (1-iz_0)^3(1+itan\alpha) \quad \text{أ- لدينا :}$$

$$|1+iz_0|^3 |1-itand| = |1-iz_0|^3 |1+itan\alpha| \quad \text{لأن :}$$

$$|1+iz_0|^3 \sqrt{1+\tan^2\alpha} = |1-iz_0|^3 \sqrt{1+\tan^2\alpha}$$

$$|1+iz_0|^3 = |1-iz_0|^3 \quad \text{وبما أن : } \sqrt{1+\tan^2\alpha} \neq 0$$

$$\text{ومنه : } |1+iz_0| = |1-iz_0|$$

$$\text{ب- لدينا : } |1+iz_0| = |1-iz_0| \Leftrightarrow |i(z_0-i)| = |-i(z_0+i)|$$

$$\Leftrightarrow |i||z_0-i| = |-i||z_0+i|$$

$$\Leftrightarrow |z_0-i| = |z_0+i| \quad (|i| = |-i| = 1)$$

$$\Leftrightarrow (z_0-i)(\bar{z}_0+i) = (z_0+i)(\bar{z}_0-i)$$

$$\Leftrightarrow i(z_0-\bar{z}_0) = -i(z_0-\bar{z}_0)$$

$$\Leftrightarrow z_0-\bar{z}_0 = 0 \Leftrightarrow \bar{z}_0 = z_0 \Leftrightarrow z_0 \in \mathbb{R}$$

$$(2) \text{ أ- لدينا : } \frac{1+itan\alpha}{1-itand} = \frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = (e^{i\alpha})^2$$

$$(1+iz)^3(1-itand) = (1-iz)^3(1+itan\alpha) \quad \text{ب- لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+itan\alpha}{1-itand} = (e^{i\alpha})^2$$

$$z = \tan\theta \quad \text{بما أن :}$$

$$(E) \Leftrightarrow \left(\frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta} \right)^3 = e^{2i\pi} \Leftrightarrow e^{6i\theta} = e^{2i\pi}$$

$$\Leftrightarrow 6\theta = 2\pi + 2k\pi \quad | k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{2+k\pi}{3} \quad | k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S = \left\{ e^{i\frac{2\pi}{3}}; e^{i(\frac{4\pi}{3})}; e^{i(\frac{6\pi}{3})}; e^{i(\frac{8\pi}{3})}; e^{i(\frac{10\pi}{3})}; e^{i(\frac{12\pi}{3})} \right\}$$

$$n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$$z^n = \bar{z}$$

حل في المعادله

53

الاجواب : ليكن z مجموعة حلول المعادله $z^n = \bar{z}$

لدينا : $0 \in S$

ليكن $z \neq 0$ ، $z = R e^{i\theta}$ ، $R > 0$ ، $\theta \in \mathbb{R}$

$$z \in S \Leftrightarrow z^n = \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow R^n e^{in\theta} = R e^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow R^{n-1} e^{i(n+1)\theta} = 1$$

$$\Leftrightarrow R^{n-1} = 1 \quad \text{و} \quad (n+1)\theta = 2k\pi \quad | k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow R = 1 \quad \theta = \frac{2k\pi}{n+1} \quad | k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z = e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} \quad | k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$S = \{0\} \cup \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} \mid k \in \{0, 1, \dots, n\} \right\}$$

ليكن $n \in \mathbb{N}$ حيث $n \geq 2$ ، ليكن $w \in \mathbb{C}$ حيث

$$w \neq 1 \quad \text{و} \quad w^n = 1$$

54

$$S = 1 + 2w + 3w^2 + \dots + nw^{n-1}$$

$$1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = 0$$

$$S = \frac{n}{w-1}$$

الاجواب : (1) لدينا $\frac{1-w^n}{1-w}$

بما أن $w^n = 1$ ، $1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = 0$

(2) لدينا $S = \sum_{k=1}^n k w^{k-1}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \frac{1}{2i} \left[\left(1 + i\frac{x}{2}\right)^8 - \left(1 - i\frac{x}{2}\right)^8 \right]$$

(1) بين أن P دالة حدودية معاملاتها أعداد حقيقية

(2) حدد درجة P وروبيتها.

(3) حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^8 = 1$

(4) حل في \mathbb{R} المعادلة: $P(x) = 0$

الجواب: (1) لدينا $x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \frac{1}{2i} \left[\left(1 + i\frac{x}{2}\right)^8 - \left(1 - i\frac{x}{2}\right)^8 \right]$

$$= \frac{1}{2i} \left[\sum_{k=0}^8 C_8^k \left(i\frac{x}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^8 C_8^k \left(-i\frac{x}{2}\right)^k \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^8 C_8^k \left(\left(i\frac{x}{2}\right)^k - \left(-i\frac{x}{2}\right)^k\right)$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^8 C_8^k \left(\frac{x}{2}\right)^k \left(i^k - (-i)^k\right)$$

$$i^k = e^{\frac{\pi}{2}ki} \quad ; \quad -i = e^{\frac{3\pi}{2}i} \quad ; \quad \text{لدينا:}$$

$$i^k - (-i)^k = i^k - i^k e^{2\pi i k} = 2i \sin k\frac{\pi}{2}$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^8 \left(C_8^k \sin \frac{k\pi}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^k \quad \text{وبالتالي:}$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^8 \left(\frac{1}{2} C_8^k \sin \frac{k\pi}{2}\right) x^k$$

ومنه P دالة حدودية معاملاتها أعداد حقيقية: $a_k = \frac{1}{8} C_8^k \sin \frac{k\pi}{2}$

$$a_7 = \frac{1}{8} C_8^7 \sin \frac{7\pi}{2} \neq 0 \quad ; \quad a_8 = 0 \quad ; \quad \text{لدينا: (2)}$$

$$d^0 P = 7 \quad ; \quad \text{ومنه:}$$

$$P(-x) = \frac{1}{2i} \left[\left(1 - i\frac{x}{2}\right)^8 - \left(1 + i\frac{x}{2}\right)^8 \right] \quad \text{لدينا لكل } x \in \mathbb{R}$$

$$= -\frac{1}{2i} \left[\left(1 + i\frac{x}{2}\right)^8 - \left(1 - i\frac{x}{2}\right)^8 \right]$$

$$P(-x) = -P(x) \quad ; \quad \text{إذن:}$$

ومنه P دالة فردية.

$$z^8 = 1 \quad ; \quad \text{(3) لنحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة:}$$

$$z = e^{\frac{2k\pi}{8}i} \quad ; \quad \text{حل هذه المعادلة هي: حيث } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

منه مجموعة حلول هذه المعادلة هي: $S = \{e^{i \frac{k\pi}{4}} \mid k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$.

(4) لنحل في \mathbb{R} المعادلة: $P(x) = 0$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1+i\frac{x}{8}}{1-i\frac{x}{8}} \right)^8 = 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+i\frac{x}{8}}{1-i\frac{x}{8}} = e^{i\frac{k\pi}{4}} \quad | k \in [0, 7]$$

ملاحظة: إذا كان: $k=4$ فإن $1+i\frac{x}{8} = 1-i\frac{x}{8}$ أي: $1=1$ غير ممكن

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow 1+i\frac{x}{8} = (1-i\frac{x}{8})e^{i\frac{k\pi}{4}} \mid k \in [0, 7] \setminus \{4\}$$

$$\Leftrightarrow i\frac{x}{8}(1+e^{i\frac{k\pi}{4}}) = -1+e^{i\frac{k\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow i\frac{x}{8} = \frac{-1+e^{i\frac{k\pi}{4}}}{1+e^{i\frac{k\pi}{4}}} = \frac{2i\sin\frac{k\pi}{8}}{2\cos\frac{k\pi}{8}} = i\tan\frac{k\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = 8\tan\frac{k\pi}{8} \quad | k \in [0, 7] \setminus \{4\}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة: $P(x) = 0$ هي:

$$S' = \{8\tan\frac{k\pi}{8} \mid k \in [0, 7] \setminus \{4\}\}.$$

ليكن n عدد صحيح طبيعي أكبر قليلاً من 2.

56

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^n = -1$ ، وتكن S مجموعة حلولها.

ب- بين أن: $z \in S \Leftrightarrow n \in 2$ [4]

جست: $z^n = -1$

(2) أكتب على الشكل المتطابق العدد العقدي: $\mu = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

ب- بين أن: $(\forall p \in \mathbb{N}) \cdot \mu^p + \mu^p = 2\cos(\frac{p\pi}{4})$ (تدعواؤك μ)

(3) نعتبر التتالييف f من \mathbb{C} نحو \mathbb{C} بحيث:

$$f(z) = \frac{1}{2}[(1+\mu z)^n + (1+\bar{\mu}z)^n]$$

(4) حل في \mathbb{C} المعادلة: $f(z) = 0$ ، ونضع أن جميع حلولها أعداد خيالية.

الجواب: 1 (2) $z \in S \Leftrightarrow z^n = -1 = e^{i\pi}$

$$\Leftrightarrow z = e^{i(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \quad | k \in [0, n-1] = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$S = \{e^{i\frac{\pi}{n}(2k+1)} \mid k \in [0, n-1]\}$$

ومنه:

$$z \in S \Leftrightarrow \exists k \in [0, n-1] : e^{i\frac{\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{n}(2k+1)}$$

ب- لدينا:

$$\lambda \in S \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{I}0, n-1\mathbb{I} : \frac{\pi}{2} = (2k+1) \frac{\pi}{n} \quad [20]$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{I}0, n-1\mathbb{I} : \frac{\pi}{2} = (2k+1) \frac{\pi}{n} + 2d\pi \mid d \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{I}0, n-1\mathbb{I} : n = 4k+2 + 2dn \mid d \in \mathbb{Z}$$

$$\lambda \in S \Leftrightarrow n \equiv 2 \quad [4] \quad \text{ومنه،}$$

$$\mu = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \quad : \text{أيضاً (2)}$$

$$\mu^p = \cos \frac{p\pi}{4} + i \sin \frac{p\pi}{4} \quad \text{بما أن: حسب صيغة موافر لدينيا:}$$

$$\bar{\mu}^p = \cos \frac{p\pi}{4} - i \sin \frac{p\pi}{4}$$

$$\mu^p + \bar{\mu}^p = 2 \cos \frac{p\pi}{4} \quad \text{ومنه:}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = \sum_{p=0}^n C_n^p z^p \cos \left(\frac{p\pi}{4} \right) \quad : \text{أيضاً (3)}$$

$$\cos \frac{p\pi}{4} = \frac{1}{2} (\mu^p + \bar{\mu}^p) \quad \text{بما أن:}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\sum_{p=0}^n C_n^p (\mu z)^p + \sum_{p=0}^n C_n^p (\bar{\mu} z)^p \right) \quad \text{فإن:}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \left[(1 + \mu z)^n + (1 + \bar{\mu} z)^n \right] \quad \text{ومنه:}$$

$$f(z) = 0 \quad \text{لنحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة (4)}$$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow (1 + \mu z)^n + (1 + \bar{\mu} z)^n = 0 \quad \text{أيضاً:}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1 + \mu z}{1 + \bar{\mu} z} \right)^n = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \mu z}{1 + \bar{\mu} z} = e^{i \frac{(2k+1)\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{I}0, n-1\mathbb{I}$$

$$\Leftrightarrow (\mu - \bar{\mu} e^{i \frac{\pi}{n}(2k+1)}) z = e^{i \frac{\pi}{n}(2k+1)} - 1 \mid k \in \mathbb{I}0, n-1\mathbb{I}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{e^{i \frac{\pi}{n}(2k+1)} - 1}{\mu - \bar{\mu} e^{i \frac{\pi}{n}(2k+1)}} \mid k \in \mathbb{I}0, n-1\mathbb{I}$$

$$\text{ومنه مجموعة حلول المعادلة: } f(z) = 0 \text{ هي:}$$

$$S' = \left\{ \frac{e^{i \frac{\pi}{n}(2k+1)} - 1}{\mu - \bar{\mu} e^{i \frac{\pi}{n}(2k+1)}} \mid k \in \mathbb{I}0, n-1\mathbb{I} \right\}.$$

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \omega^k \quad (\text{لنحسب كل شيء})$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k \omega^k + \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k \omega^{k-1} \cdot \omega \quad \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0 \text{ لأن } \omega^n = 1 \right)$$

$$S = \omega \sum_{k=1}^{n-1} k \omega^{k-1} = \omega \left(\sum_{k=1}^n k \omega^{k-1} - n \omega^{n-1} \right)$$

$$S = \omega S - n \omega^n \quad \text{إذن:}$$

$$(w^n = 1) \quad (1 - \omega) S = -n \quad \text{أي:}$$

$$S = \frac{n}{\omega - 1} \quad \text{منه:}$$

57 ليكن n من \mathbb{N} بحيث: $n \geq 2$ ، وليكن ω جذرًا نونيًا للوحدة

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \omega^k \quad \text{أحسب المجموع:}$$

الاجواب: لدينا: $\exists p \in \{0, 1, \dots, n-1\} : \omega = e^{\frac{2p\pi}{n}}$ أي: $\omega^n = 1$

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \omega^k = \sum_{k=0}^n C_n^k \omega^k - \omega^n \quad \text{لدينا:}$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k \omega^k - 1 \quad (\omega^n = 1)$$

$$= (1 + \omega)^n - 1$$

$$= (1 + e^{\frac{2ip\pi}{n}})^n - 1$$

$$= \left[e^{\frac{ip\pi}{n}} (e^{-\frac{ip\pi}{n}} + e^{\frac{ip\pi}{n}}) \right]^n - 1$$

$$= e^{ip\pi} (2 \cos^2 \frac{p\pi}{n}) - 1$$

$$S = (2^n \cos^n(\frac{p\pi}{n})) e^{ip\pi} - 1 \quad \text{وبالتالي:}$$

58 ليكن $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ و $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$(E) \quad \left(\frac{1 - iz}{1 + iz} \right)^n = \frac{1 - i \tan \alpha}{1 + i \tan \alpha} \quad \text{حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة:}$$

الجواب : مجموعة تعريف المعادلة (E) هي : $D = \mathbb{C} \setminus \{i\}$

$$\frac{1 - i \tan \alpha}{1 + i \tan \alpha} = \frac{\cos \alpha - i \sin \alpha}{\cos \alpha + i \sin \alpha} = \frac{e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}} = e^{-2i\alpha} \quad \text{لدينا :}$$

ولتكن S مجموعة حلول المعادلة (E). ونفرض : $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$

$$z \in S \Leftrightarrow z^n = e^{-2i\alpha} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : z = e^{i(\frac{2\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$$

$$k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad \text{حيث :} \quad \theta_k = -\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n} \quad \text{نفرض :}$$

$$z \in S \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = e^{2i\theta_k}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : i\sqrt{3}(1+e^{2i\theta_k}) = 1-e^{2i\theta_k}$$

$$e^{2i\theta_k} = -1 \quad \text{أي :} \quad e^{2i\theta_k} + 1 = 0$$

$$z^n = e^{2i\theta_k} \quad \text{و بما أن :} \quad e^{2i\theta_k} = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$$

$$n\alpha \in]0, \pi[: \quad (-1)^n = e^{-2i\alpha} \quad \text{لأن :}$$

$$e^{2i\theta_k} + 1 \neq 0 \quad \text{لكل } k \text{ من } \{0, 1, \dots, n-1\} \quad \text{ومن :}$$

$$z \in S \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : z = \frac{1}{i} \left(\frac{1 - e^{2i\theta_k}}{1 + e^{2i\theta_k}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : z = \frac{1}{i} \frac{e^{-i\theta_k} - e^{i\theta_k}}{e^{-i\theta_k} + e^{i\theta_k}}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : z = -\frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_k} = -\tan \theta_k$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : z = -\tan \left(-\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n} \right)$$

$$S = \left\{ -\tan \left(-\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n} \right) \mid k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\} \quad \text{وبالتالي :}$$

(1) أكتب على الشكل المتلبي حلول كلا من المعادلتين :

$$(E_1) : z^3 = e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

$$(E_2) : z^3 = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\forall u \in \mathbb{R} : 1 + e^{iu} = 2e^{i\frac{u}{2}} \cos \frac{u}{2} \quad (2) \quad \text{بين أن :}$$

$$(z-1)^6 + (z-2)^3 + 1 = 0 \quad (3) \quad \text{حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة التالية :}$$

الجواب : (1) حلول المعادلة $z^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ هي الأعداد العقدية
 $z_k = e^{i(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})} \quad |k \in \{0, 1, 2\}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S_1 = \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right); \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right); \cos\left(\frac{10\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{9}\right) \right\}$$

$$z \in S_1 \Leftrightarrow z^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow \bar{z}^3 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow \bar{z} \in S_1$$

بأن : S_2 مجموعة حلول المعادلة (E) فإن :

$$S_2 = \left\{ \cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right); \cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{9}\right); \cos\left(-\frac{10\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{9}\right) \right\}$$

$$(2) \text{ لدينا : } 1 + e^{i\alpha} = \left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right) + \left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

$$= e^{i\frac{\alpha}{2}} \left(e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$$1 + e^{i\alpha} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}} \quad \text{، ومنه :}$$

$$(3) \text{ لتحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } (z-1) + (z-1)^3 + 1 = 0 \quad (E)$$

نكتب S مجموعة حلول المعادلة (E) ، ونضع : $w = (z-1)^3$

$$z \in S \Leftrightarrow w + w^{\frac{1}{3}} + 1 = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow w = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أو} \quad w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow w = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{أو} \quad w = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow (z-1)^3 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{أو} \quad (z-1)^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$(z-1)^3 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow z + 1 = e^{i(-\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})} \quad |k \in \{0, 1, 2\} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + e^{i(-\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})} \quad |k \in \{0, 1, 2\}$$

$$\Leftrightarrow z = 2 \cos\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right) e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})} \quad |k \in \{0, 1, 2\}$$

$$(z-1)^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow z = 2 \cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right) e^{i(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})} \quad |k \in \{0, 1, 2\}$$

و بالتالي :

$$S = \left\{ 2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) e^{i\frac{\pi}{9}}; 2 \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) e^{i\frac{2\pi}{9}}; 2 \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) e^{i\frac{5\pi}{9}}; \right. \\ \left. 2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) e^{-i\frac{\pi}{9}}; 2 \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) e^{-i\frac{2\pi}{9}}; 2 \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) e^{-i\frac{5\pi}{9}} \right\}$$

60

ليكن θ من \mathbb{R} ، $n \in \mathbb{N}^*$

$$Z = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - 2 \cos \theta e^{\frac{ik\pi}{n}} + 1 \right)$$

$$x^2 - 2 \cos \theta x + 1 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) \quad \text{لدينا أن لكل } x \text{ من } \mathbb{C}$$

$$Z = 2(1 - \cos n\theta) \quad \text{استنتج أن :}$$

$$(x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) = x^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})x + e^{i\theta}e^{-i\theta} \quad \text{لدينا : (2)}$$

$$(x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) = x^2 - 2 \cos \theta x + 1 \quad \text{ومن :}$$

$$x = e^{\frac{ik\pi}{n}} \quad \text{(2) نضع :}$$

$$e^{\frac{ik\pi}{n}} - 2 \cos \theta e^{\frac{ik\pi}{n}} + 1 = \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{i\theta} \right)^2 - 2 \cos \theta e^{\frac{ik\pi}{n}} + 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$= x^2 - 2 \cos \theta x + 1$$

$$= (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})$$

$$Z = \sum_{k=0}^{n-1} (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) \quad \text{منه ،}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\theta} - x)(e^{-i\theta} - x) = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\theta} - x) \sum_{k=0}^{n-1} (e^{-i\theta} - x)$$

$$\forall y \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad y^n - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} (y - e^{\frac{2k\pi i}{n}}) \quad \text{ملحظة هامة}$$

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} \right)^n = 1 \quad Z = (e^{in\theta} - 1)(e^{-in\theta} - 1) \quad \text{ومن :}$$

$$Z = 1 - (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) + 1$$

$$Z = 2 - 2 \cos(n\theta)$$

$$Z = 2(1 - \cos(n\theta)) \quad \text{وبالتالي :}$$

61

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، $a, b \in \mathbb{R}$ حيث : $b \neq 0$

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kb) \quad \text{ضع : } C = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb)$$

$$T = e^{ia} \left(\frac{1 - e^{inb}}{1 - e^{ib}} \right) \quad \text{3}$$

$$\operatorname{Im}(T) \quad \text{و} \quad \operatorname{Re}(T) \quad \text{(2) حدد :}$$

$$T = C + ib \quad \text{(2) ليكن أن :}$$

$$\text{3) استنتج حساب : } S \text{ و } C$$

الجواب (1) لدينا :

$$\begin{aligned}
 T &= e^{ia} \left(\frac{1 - e^{inb}}{1 - e^{ib}} \right) \\
 (b \neq 0) &= e^{ia} \cdot e^{\frac{inb}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{inb}{2}} - e^{\frac{inb}{2}}}{e^{\frac{ib}{2}} (e^{-\frac{ib}{2}} - e^{\frac{ib}{2}})} \\
 &= e^{i(a+b(\frac{n-1}{2}))} \frac{\sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\sin(\frac{nb}{2})}{\sin \frac{b}{2}} \left(\cos(a+b(\frac{n-1}{2})) + i \sin(a+b(\frac{n-1}{2})) \right) \\
 \Re(T) &= \frac{\sin(\frac{nb}{2})}{\sin(\frac{b}{2})} \cos(a+b(\frac{n-1}{2})) \quad \text{و} \\
 \Im(T) &= \frac{\sin(\frac{nb}{2})}{\sin(\frac{b}{2})} \sin(a+b(\frac{n-1}{2}))
 \end{aligned}$$

لدينا (2)

$$\begin{aligned}
 C + iS &= \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) + i \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kb) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (\cos(a+kb) + i \sin(a+kb)) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kb)} = e^{ia} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{ib})^k \\
 C + iS &= e^{ia} \cdot \frac{1 - (e^{ib})^n}{1 - e^{ib}} = e^{ia} \frac{1 - e^{inb}}{1 - e^{ib}} \quad (e^{ib} \neq 1 \text{ و } \frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

$$T = C + iS \quad \text{و} \quad \text{لدينا}$$

$$(C, S) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad T = C + iS \quad \text{بمعنى (3)}$$

$$S = \Im(T) \quad ; \quad C = \Re(T) \quad \text{فإن (4)}$$

$$C = \frac{\sin(\frac{nb}{2})}{\sin(\frac{b}{2})} \cos(a+b(\frac{n-1}{2})) \quad \text{و}$$

$$S = \frac{\sin(\frac{nb}{2})}{\sin(\frac{b}{2})} \sin(a+b(\frac{n-1}{2}))$$

(١) بين أن المعادلة : $P(z) = 0$ تقبل حلاً حقيقياً .(٢) لتكن α, β, γ حلول المعادلة : $P(z) = 0$.١- بدون حساب α, β, γ أحسب مايلي :

$$\alpha\beta\gamma \quad \text{و} \quad \alpha + \beta + \gamma \quad \text{و} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

ب- حل في ٤ المعادلة : $P(z) = 0$.(٣) استخرج حلول النظم : S في \mathbb{C} المعرنة بمايلي :

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = -1 \\ |x| = |y| = |z| = 1 \\ x y z = -1 \end{cases}$$

الجواب :(١) نلاحظ أن : $P(-1) = 0$ ومنه : ١- حلاً للمعادلة : $P(z) = 0$ ملاحظة : بما أن : $P(z) = P(\bar{z})$ و $d^0 P = 3$ فإن أحد حلول المعادلة : $P(z) = 0$ تقبل حلاً حقيقياً . (لأنما يقبل ثلاث حلول)(٢) ١- بما أن α, β, γ حلول المعادلة : $P(z) = 0$ و $d^0 P = 3$ فيكون : $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = (z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)$

$$\begin{aligned} &= z^3 - (\alpha + \beta + \gamma)z^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)z - \alpha\beta\gamma \\ &= z^3 + z^2 + z + 1 \end{aligned}$$

$$\text{ومنه : } \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -1 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1 \\ \alpha\beta\gamma = -1 \end{cases}$$

ب- لدينا : $P(z) = (z + 1)(z^2 - 1)$

$$P(z) = (z + 1)(z - i)(z + i)$$

إذاً : $z = -1$ و $z = -i$ و $z = i$ و $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -1$ ومنه مجموعة حلول المعادلة : $P(z) = 0$: $S_1 = \{-1, -i, i\}$ (٣) لدينا : $\bar{z} = \frac{1}{z}$ و $\bar{y} = \frac{1}{y}$ و $\bar{x} = \frac{1}{x}$ و $|x| = |y| = |z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$ و $\bar{y} = \frac{1}{y}$ و $\bar{x} = \frac{1}{x}$

لكن S_2 مجموعة حلول النظم (5)

$$(x, y, z) \in S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ |x|=|y|=|z|=1 \\ xyz=-1 \end{cases} \quad \text{إذاً ،}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-1 \\ x=\frac{1}{2} \quad y=\frac{1}{2} \quad z=\frac{1}{2} \\ xyz=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-1 \\ x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-1 \\ xyz=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-1 \\ yz+xy+yz=-xyz \\ xyz=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-1 \\ xy+yz+zx=1 \\ xyz=-1 \end{cases}$$

$(x, y, z) \in S_2 \Leftrightarrow P(t)=0$ مع حلول المعادلة ، ومنه ،

$$S_2 = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1, -1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1)\}$$

وبالتالي

63 (1) أ- حل $x^2 - x + 1 = 0$ ثم أكتب

الجذورين على شكلهما المثلثي .

$$b - \text{استخرج حل النظم في } \mathbb{C} \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ xy = 1 \end{cases} \quad \text{حيث } \operatorname{Im} y^3 \leq 0$$

(2) أ- لنك \mathbb{C} المعادلة $z^3 - 3z - 1 = 0$ (E) ولكي x, y عدد عقدي

$$x, y = 1$$

أ- استأب $x + y$ حذر للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان $x^3 + y^3 = 1$

ب- استنتج مما سبق أن حلول المعادلة (E) هي $S = \{2\cos\frac{\pi}{9}, 2\cos\frac{7\pi}{9}, 2\cos\frac{13\pi}{9}\}$

الجواب : (1) أ- لدينا : $x^2 - x + 1 = 0$ و $x \in \mathbb{C}$ (4)

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2 \quad \text{ومنه ، } \sigma = 3i \text{ جذر مربع لـ } (\Delta)$$

$$x = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{إذاً ،}$$

$$S_2 = \{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\} \quad \text{ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي .}$$

ب- لدينا النظمة :
 (S) : $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ xy = 1 \\ \operatorname{Im}(y^3) \leq 0 \end{cases}$

لتكن S_2 مجموعة حلول النظمة (S).
 $(x, y) \in S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ xy = 1 \\ \operatorname{Im}(y^3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^3 y^3 = 1 \\ \operatorname{Im}(y^3) = 1 \end{cases}$

لاحظ : x^3 و y^3 هما حلبي المعادلة : $x^2 - x + 1 = 0$ أي :

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وبما أن : $\operatorname{Im}(y^3) \leq 0$ فإن : $y^3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

أي : $y^3 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ومنه : $y = e^{i(-\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3})}$ حيث : $k \in \{0, 1, 2\}$

أي : $y = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ أو $y = e^{-i\frac{5\pi}{3}}$ أو $y = e^{-i\frac{7\pi}{3}}$

وبما أن $xy = 1$ فإن : $x = e^{i\frac{\pi}{3}}$ أو $x = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ أو $x = e^{i\frac{7\pi}{3}}$

وبالتالي : $S_2 = \left\{ (e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}) ; (e^{i\frac{5\pi}{3}}, e^{-i\frac{5\pi}{3}}) ; (e^{i\frac{7\pi}{3}}, e^{-i\frac{7\pi}{3}}) \right\}$

(د) لدينا المعادلة : $(E) \quad z^3 - 3z - 1 = 0$

$(x+y)^3 - 3(x+y) - 1 = 0 \Leftrightarrow (E) \quad x+y$ حل للمعادلة

$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3(x+y) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x^3 + y^3 + 3xy(x+y) - 3(x+y) = 1 \Leftrightarrow$

$x^3 + y^3 + (x+y)(3xy - 3) = 1 \Leftrightarrow x^3 + y^3 = 1$

أي : $xy = 1$

ب- نضع : $z = x+y$ حيث $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ و $xy = 1$

(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ xy = 1 \\ z = x+y \end{cases}$

وهنا حلول المعادلة (E) : $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2 \cos \frac{\pi}{3}$

$e^{i\frac{5\pi}{3}} + e^{-i\frac{5\pi}{3}} = 2 \cos \frac{5\pi}{3}$, $e^{i\frac{7\pi}{3}} + e^{-i\frac{7\pi}{3}} = 2 \cos \frac{13\pi}{9}$

وبالتالي : $S_2 = \left\{ 2 \cos \frac{\pi}{3} ; 2 \cos \frac{7\pi}{9} ; 2 \cos \frac{13\pi}{9} \right\}$

المستوى العددي حسوب إلى معلم متعاقد مختلف $(0, \vec{u}, \vec{v})$

64

(1) حدد على الشكل التالي حلول المعادلة $z^6 - z = 0$ $z \in \mathbb{C}$

و مثل صورها في المستوى العددي و نرمز لها بعدتها بالرسب المراتبي

المسماة إلى المجال $[0, 2\pi)$ ، $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$

(2) س أن المستقيم (A_3A_5) يقطع المستقيم $[OA_0]$ في منتصفه

و لكن نقطته تعالج العطفين $[A_0A_2]$ و $[A_1A_5]$

يعرف عن العطف M_0 في المثلث OA_0A_2 يعرف كذلك النقط M_1, M_2, M_3

و M_4, M_5 في المثلثات OA_1A_2 و OA_2A_3 ، OA_3A_4 و OA_4A_5 و OA_5A_0

(3) ليكن m_k لحد العطف M_k حسب $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

حدد عمدياً معيار وعمدة m_0 ثم m_5 .

الجواب : (1) لتعطي \mathbb{C} المعادلة : $z^6 - z = 0$ (E)

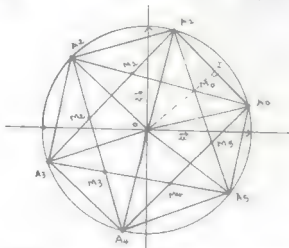
$$z^6 = z$$

سأ أن $z = [1, \frac{\pi}{3}] = e^{i\frac{\pi}{3}}$ فإن حلول المعادلة (E) هي

$$z = e^{i(\frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{6})} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S = \left\{ e^{i\frac{\pi}{42}}, e^{i\frac{5\pi}{42}}, e^{i\frac{9\pi}{42}}, e^{i\frac{13\pi}{42}}, e^{i\frac{17\pi}{42}}, e^{i\frac{21\pi}{42}} \right\}$$



نبدأ $(A_0A_1A_2A_3A_4A_5)$ سداسي منتظم بحيث $(\vec{u}, \vec{OA_0}) \equiv \frac{\pi}{24} [2\pi]$ و $\|\vec{OA_0}\| = 1$

(2) لنبين المثلث $OA_k A_{k+1}$ ($0 \leq k \leq 4$) متساوي الأضلاع لأن:

$$\begin{cases} OA_k = OA_{k+1} = 1 \\ (\vec{OA_k}, \vec{OA_{k+1}}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$$

وبالتالي $OA_0 A_1$ متساوي الأضلاع، وكذلك $OA_5 A_0$ متساوي الأضلاع،

$$\text{إذن: } OA_5 = A_0 A_5 \quad \text{و} \quad OA_2 = A_0 A_1$$

ومن $(A_1 A_2)$ واسط القطعة $[OA_0]$ ومن $(A_2 A_3)$ واسط القطعة $[OA_5]$ في المنتصف.

ب - كذلك لدينا $(A_0 A_2)$ واسط القطعة $[OA_1]$ وأد M_0 نقطة على

واسط المثلث $OA_0 A_2$ ومنه M_0 مركز ثقل (أو مركز الدائرة المحيطة).
المثلث $OA_0 A_2$.

(3) في المثلث المتساوي الأضلاع $OA_0 A_1$ ، نك I منتصف $[A_0 A_2]$

$$\text{إذن: } OM_0 = \frac{2}{3} OI = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (OI = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ لأن } \angle OI = \frac{\pi}{2})$$

$$|m_0| = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ومن:}$$

$$\arg m_0 = (\vec{x}, \vec{OM_0}) = \quad [2\pi] \quad \text{لدينا:}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$$

$$\arg m_0 = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{ومن:}$$

نعتبر المثلثات المتساوية الأضلاع $OA_k A_{k+1}$ ($0 \leq k \leq 5$) ونفس الطريقة نبين أن:

$$|m_k| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\arg m_k = (\vec{x}, \vec{OM_k}) \quad [2\pi] \quad \text{و}$$

$$= (\vec{x}, \vec{OM_0}) + (\vec{OM_0}, \vec{OM_k}) \quad [2\pi]$$

$$\arg m_k = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad \text{ومن:}$$

ليكن a, b عددين \mathbb{C} ، ليكن z_1, z_2 حلبي المعادلة:

$$() \quad z \in \mathbb{C} \quad z^2 + az + b = 0$$

$$|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} |b| = 1 \text{ و } |a| \leq 2 \\ \arg b \equiv 2 \arg a \pmod{2\pi} \end{cases}$$

يسأل

الجواب : (\Rightarrow) نفترض : $|z_1| = |z_2| = 1$

لدينا z_1 و z_2 حلبي المعادلة $z^2 + az + b = 0$ فإن $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 z_2 = b \end{cases}$

ومنه : $|b| = 1$ أي : $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 1$

لدينا $|a| \leq 2$ أي : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 2$

لدينا $\begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \theta_1 \in \mathbb{R} & z_1 = e^{i\theta_1} \\ \exists \theta_2 \in \mathbb{R} & z_2 = e^{i\theta_2} \end{cases}$

ومنه : $a = -(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}) = -e^{i(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})} \left(e^{i(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2})} + e^{-i(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2})} \right)$

$a = -e^{i(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})} \cdot 2 \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)$

$a^2 = 4e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \cos^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)$ إذن :

$2 \arg(a) \equiv \arg(a^2) = \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi}$ ومنه :

$b = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ ولدينا :

$\arg(b) \equiv \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi}$ ومنه :

$\arg(b) \equiv 2 \arg(a) \pmod{2\pi}$ وبالتالي :

(\Leftarrow) نعرض أن : $|a| \leq 2$ و $|b| \leq 1$ و $\arg b \equiv 2 \arg a \pmod{2\pi}$

$|b| = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} : b = e^{i\theta}$ لدينا :

$\arg b \equiv 2 \arg(a) \pmod{2\pi}$ معاً :

$\arg(a) \equiv \theta \pmod{2\pi}$ فإن :

($e^{i\theta} |a| \leq 2$ و $|a| \leq 2$) $\exists r \in [0, 2] : a = re^{i\theta}$ ومنه :

لحل المعادلة (E) : $z^2 + az + b = 0$
 لذا : $\Delta = a^2 - 4b = R^2 e^{2i\theta} - 4e^{2i\theta} = e^{2i\theta}(R^2 - 4) = (\sqrt{4 - R^2} e^{i\theta})^2$
 لأن : $R^2 - 4 < 0$

ومنه حلول المعادلة (E) هي :

$$\frac{-R e^{i\theta} + i \sqrt{4 - R^2} e^{i\theta}}{2} \quad , \quad \frac{-R e^{i\theta} - i \sqrt{4 - R^2} e^{i\theta}}{2}$$

أي : $\epsilon \in \{-2, 1\}$ مع
$$\frac{-R + \epsilon i \sqrt{4 - R^2}}{2} e^{i\theta}$$

ومنه :
$$\left| \frac{-R + \epsilon i \sqrt{4 - R^2}}{2} e^{i\theta} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 + 4 - R^2} = 1$$

إذن : $|z_1| = |z_2| = 1$ حيث z_1 و z_2 حلول المعادلة (E)

وبالتالي : $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = 1 \text{ و } |b| \leq 2 \\ \arg b \equiv 2 \arg a \pmod{2\pi} \end{cases}$

66 المسوى العددى 3 مسوب إلى معلم معامد مصفهم $(0, 2, 3)$

لنك (E) الدائر + الب مركزيات وساعما $R (R > 0)$ ، النقطة A من (6) تحققها R.

لنك n عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ و n الاوران الذي مركزة 0 ، راون $\frac{2\pi}{n}$.

بحسب المبالغة للنقطة $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ من الدائر (6) المعروفة بـ

$$M_{k+2} = 2(M_k) \quad \text{و} \quad M_0 = A$$

ويكن z_k لحق النقطة M_k .

(a) - لكل k من \mathbb{Z} بحسب عن z_{k+2} بدلالة z_k .

ب - استنتج z_k بدلالة k و n .

ج - قارن M_0 و M_n .

د - أنشئ الشكل من أجل $n = 26$ و $R = 4 \text{ cm}$.

(e) أ - يجب أن لكل k من \mathbb{Z} : $\|\vec{M_0 M_{k+2}}\| = 2R \sin \frac{\pi}{n}$

ب - نصح $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\vec{M_0 M_{k+2}}\| = 2R$ ، وعلناؤنا هذسؤال.

الجواب : 1. f . ليكن $M(z)$ نقطة من المستوى \mathbb{C} و $M'(z')$ محور دوران

مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{n}$

$$z(M(z)) = M'(z') \iff z' - O = e^{i\frac{2\pi}{n}}(z - O) \quad (1)$$

$$\iff z' = e^{i\frac{2\pi}{n}}z$$

$$z(M_k) = M_{k+1} \iff z_{k+1} = e^{i\frac{2\pi}{n}}z_k \quad \text{ومنه :}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : z_{k+1} = e^{i\frac{2\pi}{n}}z_k \quad \text{بـ : بمات :}$$

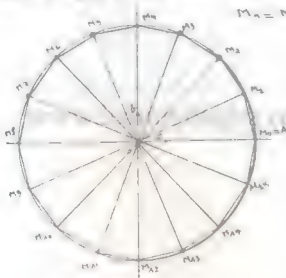
فإن (z_k) متتالية هندسية أساسها $q = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ و $z_0 = R$

$$\forall k \in \mathbb{N} : z_k = z_0 \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k \quad (2)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : z_k = R e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{أي :}$$

$$z_n = R e^{i\frac{2n\pi}{n}} = R e^{i2\pi} = R \quad \text{جـ : لـ : لـ : } z_n \text{ و } M_n \text{ و } z_0 = R$$

$$M_n = M_0 \quad \text{ومنه :}$$



$$M_0 M_{k+1} = |z_{k+1} - z_0| \quad (3) \quad \text{أـ : ليكن } k \text{ و } N \text{ لـ :}$$

$$= \left| e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}} R - e^{i\frac{2\pi}{n}} R \right| = R \left| e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1 \right| = R \left| e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1 \right|$$

$$= R \left| \left(\cos \frac{2k\pi}{n} - 1 \right) + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right| = R \sqrt{\left(\cos \frac{2k\pi}{n} - 1 \right)^2 + \sin^2 \frac{2k\pi}{n}}$$

$$= R \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n}} = R \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n} \right)} = R \sqrt{4 \sin^2 \frac{k\pi}{n}}$$

$$M_0 M_{k+1} = 2R \sin \frac{k\pi}{n} \quad \text{وبالتالي :}$$

بـ : ليكن L_n محيط المثلث المتكامل (M_0, M_1, \dots, M_n)

وسب السؤال (2) 1- لدينا $L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_{n-1} M_n$

$$= 2R \sin \frac{\pi}{n} + 2R \sin \frac{\pi}{n} + \dots + 2R \sin \frac{\pi}{n}$$

ومنه $L_n = 2nR \sin \frac{\pi}{n}$

ولذا $L_n = 2\pi R \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}$

نأخذ $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 2\pi R$ ، فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

هذه النهاية تمثل محيط دائرة شعاعها R

67 مسر الأعداد العنكبوتية 1، 2، 3 و 4

(1) أكتب على الشكل المثلثي هذه الأعداد .

(2) ليكن a, b, c هذه الأعداد الثلاث يجب $|a| < |b| < |c|$

ولتكن A, B, C صورها على التوالي في المستوى العنكبوتي (3) المسوي

إلى معلم معامد محليهم (\vec{u}, \vec{v})

1- أكتب العنكبوت A, B, C .

ب- بعد أن العنكبوت ABC عساري السامو ، فاشم الزاوية

(3) ليكن \vec{u} الزاوية المعرف من (3) و \vec{v} الذي يرمز كل نقطة $M(2)$

بالعنكبوت $M(2)$ يجب $z' = 2cz + 1 - 2a$

لتكن A, B, C و A', B', C' أضعافها a, b, c على التوالي . صور العنكبوت A, B, C بالتطبيق في على التوالي .

1- حدد A, B, C وأنشئ A', B', C' في المستوى (3)

حدد لمجموعة المثلث $A'B'C'$

ب- 1 حسب $\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b}$. أكتب له على الشكل المثلثي .

و استنتج منه $\frac{B'C'}{B'C}$ و قياساً الزاوية $(\vec{B'C'}, \vec{B'C})$

ما دام ليكن أن يكون عند المستقيمين (BC) و $(B'C')$

الجواب (1) لدينا : $1 - 1 + 1 - \sqrt{2}$ ، إذن

$$-1 + 1 = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$|3(1+i)| = 3\sqrt{2} \quad \text{لدينا:}$$

$$3(1+i) = 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3\sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right) = 3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{و. ا. ن.}$$

$$z = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2e^{i0} \quad \text{لدينا:}$$

نقطة إنشاء A, B, C:

$$c = 3(1+i) \quad \text{و} \quad b = 2 \quad \text{و} \quad a = -1+i \quad \text{فإن: } \sqrt{2} < 2 < 3\sqrt{2}$$

$$\text{منه:} \quad A(-1, 1) \quad \text{و} \quad B(2, 0) \quad \text{و} \quad C(3, 3)$$

$$AB = |b - a| = |3 - i| = \sqrt{10} \quad \text{ب - لدينا}$$

$$AC = |c - a| = |4 + 2i| = \sqrt{20}$$

$$BC = |c - b| = |1 + 3i| = \sqrt{10}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{و} \quad AB = BC \quad \text{بما أن:}$$

فإن ABC مثلث متساوي الساقين، قائم الزاوية في B

$$z' = 2iz + 1 - 2i \quad \text{لدينا:}$$

$$a' = 2ia + 1 - 2i = 2i(-1+i) + 1 - 2i \quad \text{و. ا. ن.}$$

$$a' = -2i - 2 + 1 - 2i$$

$$A'(-2, -4) \quad \text{و} \quad a' = -2 - 4i \quad \text{منه:}$$

$$b' = 2ib + 1 - 2i = 2i(2) + 1 - 2i \quad \text{لدينا:}$$

$$B'(1, 2) \quad \text{و} \quad b' = 1 + 2i \quad \text{منه:}$$

$$c' = 2ic + 1 - 2i = 2i(3+3i) + 1 - 2i \quad \text{لدينا:}$$

$$c' = 6i - 6 + 1 - 2i$$

$$C'(-5, 4) \quad \text{و} \quad c' = -5 + 4i \quad \text{منه:}$$

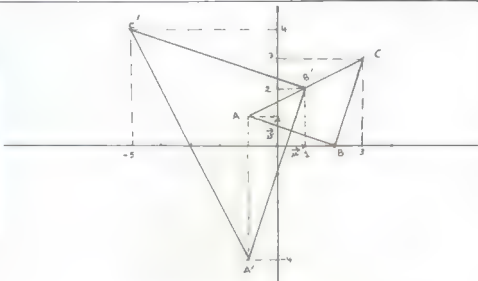
ثلاثة المثلث A'B'C'

$$A'B' = |b' - a'| = \sqrt{40} \quad \text{و} \quad B'C' = |c' - b'| = \sqrt{40} \quad \text{لدينا:}$$

$$A'C' = |c' - a'| = \sqrt{80} \quad \text{و}$$

$$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 \quad \text{و} \quad A'B' = B'C' \quad \text{بما أن:}$$

فإن A'B'C' مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في B.



ب - حساب w

$$w = \frac{c' - b'}{c - b} = \frac{-5 + 4i - 1 - 2i}{3 + 3i - 2} = \frac{-6 + 2i}{1 + 3i} \quad \text{لدينا.}$$

$$w = \frac{(-6 + 2i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = \frac{-6 + 18i - 2i + 6i^2}{1 - 9i^2}$$

$$w = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{لدينا.}$$

$$\frac{b'c'}{bc} = \frac{|c' - b'|}{|c - b|} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = 2 \quad \text{لدينا.}$$

$$\arg(\vec{bc}, \vec{b'c'}) \equiv \arg\left(\frac{c' - b'}{c - b}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \arg(w) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

$$(\vec{bc}, \vec{b'c'}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad \text{إذن}$$

$$(bc) \perp (b'c') \quad \text{لدينا.}$$

المسوى العددي \mathcal{P} محسوب إلى معلم متعامد منظم $(0, \vec{u}, \vec{v})$

$$(1) \quad \text{أ- حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة: } \bar{z}^2 - 4z + 8 = 0$$

ب- أكتب على الشكل التالي حلي هذه المعادلة z_1 و z_2 معييب.

$$\text{ج- } \operatorname{Im}(z_1) > 0$$

د- أكتب \mathcal{P} و A و B صور z_1 و z_2 على التوالي

(2) بفرض المستوي \mathcal{P} المعروف بـ \mathcal{P} هو \mathcal{P} الذي يربط كل نقطة $M(z)$

بالنقطة $M'(z')$ بحيث: $z' = \frac{1}{\bar{z}}$ (\bar{z} مرافق z)

أ- لحوصل A' و B' صور A و B على التوالي بالمطابق \mathcal{P} ، وأكتب A' و B'

ب- بين أن لكل نقطة M مخالفه L ، العلم O ، M' و M مستقيمية

$$\text{وأن: } OM \cdot OM' = 1$$

(3) أ- بين أن لكل عدد عقدي غير منعدم z لوينا:

$$z' = \frac{1}{\bar{z}} \quad \text{حيث} \quad |z - 2| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1 - 2\bar{z}'}{\bar{z}'} \right| = 2$$

$$\text{و استنتج أن } |z - 2| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\bar{z}} - 2 \right| = |z'|$$

ب- لتكن (E) الدائرة التي مركزها I نصفها 2، وشعاعها $R = 2$

(4) بين أن $[AB]$ قطرًا للدائرة (E) .

(5) لتكن M نقطة من الدائرة (E) مخالفه L .

بين أن M' تنتمي إلى مستقيم (D) بسم تعدد معادلة ديكارتية له.

أكتب (3) و (5).

الاجواب: (1) أ- لتحل في \mathbb{C} المعادلة: $\bar{z}^2 - 4z + 8 = 0$ (E)

مميز هذه المعادلة هو $\Delta = 16 - 32 = (-4)^2$

وذن حلول المعادلة (E) هما: $z_1 = 2 + 2i$ و $z_2 = 2 - 2i$

مجموعه حلول المعادلة (E) هي: $S = \{2 - 2i, 2 + 2i\}$

$$\text{ب- لوينا: } |z_1| = 2\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

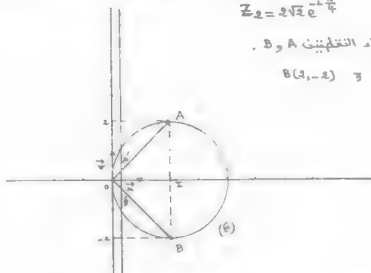
$$z_1 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{وعنه}$$

بما أن : $Z_2 = \bar{Z}_1$ فإن : $Z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$

أي : $Z_2 = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ج- إنشاء النقطتين A و B .

$A(2, 2)$ و $B(2, -2)$



د- 1- لدينا : $z'_2 = \frac{1}{z_2} = \frac{z_1}{z_1 z_2} = \frac{1+i}{4}$

ومنه : $A'(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ نجد النقطة A' .

لدينا : $z'_1 = \frac{1}{z_1} = \frac{z_2}{z_1 z_2} = \frac{1-i}{4}$

ومنه : $B'(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ نجد النقطة B' .

ب- لدينا : $z \neq 0$ حيث $OM' = |z'|$, $OM = |z|$

بما أن : $z' = \frac{1}{z}$ فإن $|z'| |z| = 1$

أي : $(|z'| = |z|) : \text{فإن} \quad |z'| |z| = |z'| |z| = 1$

ومنه : $OM \cdot OM' = 1$

د- 1- ليكن z من \mathbb{C}^* ، فإن : $z' = \frac{1}{z} \in \mathbb{C}^*$

لدينا : $\left| \frac{1-2z'}{z'} \right| = \left| \frac{1-\frac{z}{1}}{\frac{1}{z}} \right| = |z-1|$

ومنه : $\left| \frac{1-2z'}{z'} \right| = 2 \Leftrightarrow |z-1| = 2$

ولدينا : $|z-1| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1-2z'}{z'} \right| = 2$

لذا نـ : $|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2\bar{z}'|=2|\bar{z}'|$
 ومنه : $|z-2|=2 \Leftrightarrow |1-2\bar{z}'|=2|\bar{z}'|$

ب - لتبين $[AB]$ قطر الدائرة (E).

لـ : $AB = |z_2 - z_1| = |-4i| = 4 = R$

لـ : I هو منتصف $[AB]$. $\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{2 + 2i + 2 - 2i}{2} = 2$

بما أن (E) هي الدائرة التي مركزها I ، شعاعها $R=2$

فإن $[AB]$ قطر الدائرة (E).

(١) لتكن $M(z)$ نقطة من الدائرة (E) يجب $M \neq O$. إذن : $|z-2|=2$
 وحسب السؤال (3) لـ : $|\frac{1}{2} - z'| = |z'|$ حيث : $(g(M) = M'(z'))$

لتكن النقطة ذات الحرف $\frac{1}{2}$ أي : $E(\frac{1}{2}, 0)$

لذا : $|\frac{1}{2} - z'| = |z'| \Leftrightarrow EM' = OM'$

ومنـ M' تنتمي إلى واسط القطعة $[OE]$: (D) معادلته $x = \frac{1}{4}$

69 لتكن (z_n) المتتالية للاعداد العديدة المعرفة بما يلي :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = z_n + |z_n|$ ، $z_0 = \cos x + i \sin x$

حيث : $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

(1) أكتب على شكل المثلي العدد z_1

(2) لتكن (α_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n \equiv \arg z_n \quad [2\pi] \quad \text{و} \quad \alpha_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$

أ - بما أن المتتالية (α_n) محدودة أساسها $q = \frac{1}{2}$

ب - استنتج α_n بدلالة x و n

(3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = z_n - \bar{z}_n$

أ - عبر عن v_n بدلالة α_n ، ماذا يمكن أن نستنتج ؟

ب - بما أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |z_n| = \frac{\sin x}{\sin(\frac{x}{2^n})}$

(4) بيـ : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad z_n - z_0 = |z_0| + |z_1| + \dots + |z_{n-1}|$

(5) استنتج أن : $\cotan(\frac{x}{2^n}) - \cotan x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} + \dots + \frac{1}{\sin(\frac{x}{2^{n-1}})}$

الجواب : (1) لدينا : $z_1 = z_0 + |z_0| = 1 + \cos x + i \sin x$

$$z_1 = 2 \cos^2 \frac{x}{2} + 2 i \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cos \frac{x}{2} (\cos x + i \sin x)$$

بما أن $\cos \frac{x}{2} > 0$ فإن $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ ، فإن $0 < x < \pi$

ومنه : $z_1 = [2 \cos \frac{x}{2} z \frac{x}{2}] = 2 \cos x e^{i \frac{x}{2}}$

$z_n = |z_n| e^{i \alpha_n}$ ، أو $\arg z_n = \alpha_n [2\pi]$ (2)

وليس : $z_{n+1} = |z_{n+1}| e^{i \alpha_{n+1}} = z_n + |z_n|$

$$= |z_n| (e^{i \alpha_n} + 1)$$

$$= |z_n| [(e^{i \frac{\alpha_n}{2}})^2 + e^{i \frac{\alpha_n}{2}} e^{-i \frac{\alpha_n}{2}}]$$

$$= |z_n| [e^{i \frac{\alpha_n}{2}} + e^{-i \frac{\alpha_n}{2}}] e^{i \frac{\alpha_n}{2}}$$

$$= [|z_n| \cos \frac{\alpha_n}{2}] e^{i \frac{\alpha_n}{2}}$$

بما أن $|z_n| \cos \frac{\alpha_n}{2} > 0$ فإن $0 < \frac{\alpha_n}{2} < \frac{\pi}{4}$ ، فإن $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$

$\arg z_{n+1} \equiv \frac{\alpha_n}{2} [2\pi]$ ، $|z_{n+1}| = |z_n| \cos \frac{\alpha_n}{2}$

وبما أن $\forall n \in \mathbb{N}$ ، $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2}$ ، فإن $0 < \frac{\alpha_n}{2} < \frac{\pi}{2}$

ومنه (α_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأولى $\alpha_0 = x$

ب. بما أن (α_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأولى $\alpha_0 = x$

فإن : $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n = \alpha_0 (\frac{1}{2})^n$

أي : $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n = \frac{x}{2^n}$

(3) -f لدينا : $v_{n+1} = z_{n+1} - \bar{z}_{n+1}$

$$= z_n + |z_n| - (\bar{z}_n + |z_n|)$$

$= z_n + |z_n| - \bar{z}_n - |z_n|$ (لأن $|z_n| \in \mathbb{R}$)

$\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = v_n$ ، ومنه ،

لأن (v_n) متتالية ثابتة أي : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = v_0 = z_0 - \bar{z}_0$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = 2 i \sin x$

ب. - بما أن $v_n = z_n - \bar{z}_n$ ، فإن $z_n = |z_n| e^{i \frac{x}{2^n}}$

فإن : $v_n = 2 i \sin x$ ، ولدينا كذلك $v_n = 2 i |z_n| \sin (\frac{x}{2^n})$

أي أن : $2 i |z_n| \sin (\frac{x}{2^n}) = 2 i \sin x$

$$\forall n \in \mathbb{N} : |z_n| = \frac{\sin x}{\sin(\frac{x}{2^n})}$$

جمع طرفي المعادلة هذه المتساويات
نحصل على :

$$z_n = z_{n-1} + |z_{n-1}|$$

$$z_{n-1} = z_{n-2} + |z_{n-2}|$$

$$z_1 = z_0 + |z_0|$$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^* : z_n - z_0 = |z_0| + |z_1| + \dots + |z_{n-1}|$

(5) لدينا لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $z_n - z_0 = |z_0| + |z_1| + \dots + |z_{n-1}|$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sin(\frac{x}{2^n})} (\cos(\frac{x}{2^n}) + i \sin(\frac{x}{2^n})) - (\cos x + i \sin x) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sin(\frac{x}{2^n})} \cos(\frac{x}{2^n}) - \cos x = \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(\frac{x}{2^n})}{\sin(\frac{x}{2^n})} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin x}{\sin(\frac{x}{2^k})}$$

وبالتالي : $\cotan(\frac{x}{2^n}) - \cotan x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} + \dots + \frac{1}{\sin(\frac{x}{2^{n-1}})}$
لكل $n \in \mathbb{N}^*$

أجاب ما يلي

70

$h(x) = \cos 3x \cos^2 x$, $g(x) = \sin^5 2x$, $f(x) = \sin 2x \cos^2 3x$

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

الجواب : لدينا لكل $n \in \mathbb{N}$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

لدينا : $f(x) = \sin 2x \cos^2 3x = \left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \right) \left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} \right)^2$

$$= \frac{1}{16i} (e^{2ix} - e^{-2ix}) (e^{6ix} + 3e^{4ix} + 3e^{2ix} + e^{-6ix} + e^{-4ix} + e^{-2ix})$$

$$= \frac{1}{16i} (e^{2ix} - e^{-2ix}) (e^{9ix} + 3e^{7ix} + 3e^{5ix} + e^{-9ix} + e^{-7ix} + e^{-5ix})$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{16i} (e^{11ix} + 3e^{5ix} + 3e^{ix} + e^{-7ix} - e^{-ix} - 3e^{-5ix} - 3e^{-11ix}) \\
 &= \frac{1}{16i} [(e^{11ix} - e^{-11ix}) + 3(e^{5ix} - e^{-5ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix}) - (e^{-7ix} - e^{7ix})] \\
 &= \frac{1}{16i} [2i \sin 11x + 6i \sin 5x - 6i \sin x - 2i \sin 7x] \\
 f(x) &= \frac{1}{8} \sin 11x + \frac{3}{8} \sin 5x - \frac{3}{8} \sin x - \frac{1}{8} \sin 7x \quad \text{لدينا} \\
 g(x) &= \sin^5 2x = \left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \right)^5 \\
 &= \frac{1}{32i} (e^{10ix} - 5e^{6ix} + 10e^{2ix} - 10e^{-2ix} + 5e^{-6ix} - e^{-10ix}) \\
 &= \frac{1}{32i} [(e^{10ix} - e^{-10ix}) - 5(e^{6ix} - e^{-6ix}) + 10(e^{2ix} - e^{-2ix})]
 \end{aligned}$$

$$g(x) = \frac{1}{16} \sin 10x - \frac{5}{16} \sin 6x + \frac{5}{8} \sin 2x \quad \text{ومن هنا}$$

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \cos 3x \cos 5x = \left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} \right) \left(\frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} \right) \quad \text{لدينا} \\
 &= \frac{1}{8} (e^{3ix} + e^{-3ix})(e^{5ix} + e^{-5ix}) \\
 &= \frac{1}{8} (e^{8ix} + 2e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{-8ix} + 2e^{-6ix} + e^{-10ix}) \\
 &= \frac{1}{8} [(e^{8ix} + e^{-8ix}) + 2(e^{2ix} + e^{-2ix}) + (e^{6ix} + e^{-6ix})] \\
 h(x) &= \frac{1}{4} \cos 8x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 6x \quad \text{ومن هنا}
 \end{aligned}$$



تمارين للبحث

1. ليكن z و \bar{z} عددين عقديين .
 س أ $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$

2. حل في \mathbb{C} المعادلتين :
 (1) $4z + 8|z|^2 - 3 = 0$
 (2) $z + \bar{z} = |z|$

3. حدد الأعداد العقدية z بحيث :
 $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z - 1|$

4. اركب x, y, z أعداد عددية معارها ساوي 1 بحيث :
 (1) : $xy + yz = 1$ (2) : $x + y + z = 1$
 (3) : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$
 (4) احسب x, y و z .

5. ليكن a عدد عقدي مختلف لـ 1 بحيث $|a| = 1$.
 (1) بين أن كل عدد عقدي z العدد $\bar{z} = \frac{z - a\bar{z}}{1 - a}$ حقيقي .
 (2) هل العكس صحيح ؟

6. ليكن λ عدد عقدي ، نعتبر العدد العقدي
 $z_\lambda = a\lambda\bar{\lambda} + b\bar{\lambda} + \bar{b}\lambda + c$
 حيث a, b, c أعداد حقيقية معلومة ، و b عدد عقدي معلوم .
 (1) بين أن العدد z_λ عدد حقيقي .
 (2) إذا كان $a > 0$ ، س أ أن المجموعة
 $E = \{z_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$
 تمثل أصغر منحنى

7. لتكن a, b, c أعداد عددية معلومة ، نعتبر التعبير التالي .
 $(\mu, \lambda) \in \mathbb{C}^2$: $P(\lambda, \mu) = \lambda\bar{\lambda} + b\lambda\bar{\mu} + \bar{\lambda}\bar{b}\mu + c\bar{\mu}\mu$
 بين أن :
 $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 : P(\lambda, \mu) \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \text{ و } c \geq 0 \text{ و } |b|^2 \leq ac)$

للك العدد العقدي α بحيث $\alpha = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)$

8

(أ) أحسب: α^2 .

ب- حدد معيار وعمدة α^2 .

ج- استنتج معيار وعمدة العدد العقدي α .

(ب) ليكن μ العدد العقدي حيث: $\mu = \frac{\alpha}{2 + 2i}$

بيّن أن: $\mu = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$

(3) عسر في \mathbb{C} المعادلة: $z^2 + (3z^3 + 4z^4)z - 12z^7 - 0$ (E)

حيث: z هو المجهول.

أ- أوجد بدلالة μ حلي المعادلة (E)

ب- اكتب على الشكل المثلي والحقلي كل من حلي المعادلة (E)

9

ليكن z و z' عددين عقديين معلومين.

(أ) قارن: $|z + z'|^2$ و $|z|^2 + |z'|^2$

ب- ماهو الشرط لكي يكون $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2$ ؟

(2) ليكن n عدداً طبيعياً $n \geq 2$ و a_1, a_2, \dots, a_n و b_1, b_2, \dots, b_n عددين عقديين. من \mathbb{C} .

نضع: $P(z) = \sum_{k=1}^n |a_k - b_k z|^2$ حيث: $z \in \mathbb{C}$

أ- يمين أنه لكل z من \mathbb{C} لدينا:

$$P(z) = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 + |z|^2 \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 - 2 \operatorname{Re} \left(\bar{z} \sum_{k=1}^n a_k b_k \right) \right)$$

ب- نضع: $\lambda = \sum_{k=1}^n |b_k|^2$ و $\beta = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)$

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)$$

(2) أ- حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^2 - 2\sqrt{3}z - 1 = 0$ (3)

10

نرمز بـ μ و ν لحلي هذه المعادلة.

ب- اكتب μ و ν على الشكل المثلي.

(3) نعتبر المتشابهة (M_n) المعرفة بما يلي:

13 ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين بحيث : $z_1 z_2 = 5(1+i)$

(أ) - أحسب : $|z_1| |z_2|$

ب- أحسب $\arg z_1$ بدلالة $\arg z_2$

(ب) - أحسب العزاريين المربعين للعدد $w = z_1 + z_2$

ب- أحسب z_1 و z_2 إذا علمت أن :

$$z_1 z_2 = 5(1+i) \quad \text{و} \quad z_2 = z_1 + 1$$

14 يعبر العدد العدي $z = 5(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}})$

(أ) أحسب z^{-2} ، أكتب z^{-2} على الشكل المثلي .

(ب) حدد $\arg z$.

(ج) ليكن $u = ze^{i\theta}$ حيث : $z > 0$ و $\theta \in \mathbb{R}$

حدد و أنشئ المجموعات التالية :

$$E_1 = \{m(u) \mid m \in \mathbb{R}\}$$

$$E_2 = \{m(u) \mid m \in \mathbb{R}\}$$

$$E_3 = \{m(u) \mid 5 \leq |m| \leq 45\}$$

المسوى العددي مسوي . (أ) دعهم يعتمدون على (\vec{e}_1, \vec{e}_2)

15 حدد مجموعة الأعداد $M(25)$ بحيث صور الأعداد العددية

أ و ب و z' و $z = 1 + z'$ مستقيمة .

16 (أ) نقتر في \mathbb{C} المعادلة :

$$(E) : z z^3 + (-7+2i) z^2 + (10-4i) z - 8 + 4i = 0$$

أ- حل المعادلة (E) إذا علمت أن أحد جذورها عدد حقيقي 0

ب- أذكر z_1 و z_2 الجذور الأخرى للمعادلة (E) وحدد $\arg(z_1 z_2)$

أكتب z_1 على الشكل القطبي ثم أوسع الشكل الحصري للعدد $(z_1)^{199}$

(ج) - أحسب $(z_2)^3$

د- استنتج الجذور المكعبة للعدد $-2+2i$.

17

(E) $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0$ \Rightarrow الجذور $z_0 = -3.4 \times 10^{-18}$ أو $z_1 = 3.4 \times 10^{-18}$

(و) أ- حود العدوين العقدين هـ و ط بحيث :

كل $z \in \mathbb{C}$ $P(z) = (z + 3e^{i\theta})(z^2 + az + b)$

ب. لذلك α_1, α_2 "حلبت الأحمق" من المعادلات (E)

حدد z_2 و z_3 (z_1 هو الحل التخيلي الصرف)

(3) 1- أكتب z_0, z_1, z_2 على الشكل المثلثي .

$\theta = \frac{\pi}{10}$ جود المسكن } جود العددي + جود

لذلك نكتب "العدد" a , b , c في صورة $\frac{p}{q}$ ، $\frac{r}{s}$ ، $\frac{t}{u}$ حيث

$$d = \frac{a}{b} + c \cdot \frac{\sqrt{3}}{u}$$
$$z_2 = \mu i \quad \bar{z}_2 = \mu j \quad \bar{\mu} = [\mu, 0] \quad \text{für}$$

(1) اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

(2) نضع : $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$

1) حدد المماس والعدد العدد $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2}$ $\cos \frac{5\pi}{12}$

ب- استنتج الشكل القلبي للعدد 3 بدلالة 2 و 3.

13 - 9 - 1993

ب - عدد قسم 5 التي يكون من أجلها 2 ، حيثما هو

$$(k) \quad z \in D \quad z^3 - \mu_1 z^2 + \mu_2 z - \mu_3 = 0 \quad \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{C} \quad (4)$$

١- يبين أن العدد $\sqrt{2}$ - حل المعادلة (E).

ب- حل المعادلة (E).

ج - س : هو حلوا المعاد (ع) يسمى الزاد اذ : جف وردد مراراً شعاعها

19 لیکن n عدد صحیح بعضی اکر و بعضی نہ

(4) حدد علامتي الشكل العدد $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ على دوائر الوحدة. $u = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ و $v = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^{2n} - z^n + 1 = 0$:

(3) 1- لكل θ عدد حقيقي، جالف 2π لكل θ من \mathbb{Z} .

بيّن أن : $\frac{\cos \theta + i \sin \theta + 1}{\cos \theta + i \sin \theta - 1} = -i \cotan \left(\frac{\theta}{2} \right)$

ج - حل 3 المعادلة (2) $\left(\frac{z-1}{z+1} \right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n = 1$

ج - بعرض المستوى العقدي \mathbb{C} النقطة A و A' اللذان

يسر أن مجموعة صور حلول المعادلة (2) في \mathbb{C} هي نقاط المستقيمات (AM) مع محور الأعداد الحقيقية M يسمى إلى مجموعة صور الحدود والنقطة للعددين M و N في المستوى \mathbb{C} .

لك a عدد حقيقي و \mathbb{C} العدد العقدي المعطى تماثل

$$z = 8a^2 - (1+a^4)^2 + 4a(1-a^2)i$$

حدد العدد العقدي \bar{z} بحيث : $z^4 = \bar{z}$

21 حل في \mathbb{C} المعادلة : $2z^3 + (1+i(\sqrt{3}-2))z^4 + \sqrt{3} - i$

ج - أنشئ : $(x-1)^3$ و $(x+1)^3$

ج - حل 3 المعادلة : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

حل في \mathbb{C} المعادلات التالية :

(E1) : $(z+1)^3 + i(z-1)^3 = 0$

(E2) : $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

(E3) : $(1+i\frac{z}{n})^n + (1-i\frac{z}{n})^n = 0$

(E4) : $\left(\frac{z-i}{z+1} \right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+1} \right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+1} \right) + 1 = 0$

23 حل 3 المعادلة : $z^2 + 3(1+i)z + 5 = 0$

ج - بعرض \mathbb{C} الحدودية $P(z) = (z^2+3z)^2 + (z+5)^2$

أ - من أنه إذا كان z حل المعادلة $P(z) = 0$ فإن \bar{z} هو أيضاً حلاً لها

ب - عمل $P(z)$ إلى جداء حدودي بسيط. الدرجة الخامسة عددها أعداد عقدية

ج - حل في \mathbb{C} المعادلة : $P(z) = 0$.

د - أكمل $P(z)$ على شكل حد n حدود يسمى من الدرجة الخامسة أو قلها أعداد حقيقية

24

(1) أعط الشكل المثلثي لكل حل من حلول المعادلة :

$$z \in \mathbb{C} \quad , \quad z^4 = 1 + i\sqrt{3}$$

(2) أعط الشكل العشري لكل حد من الحدود من المربعين للعدد

$$u = \sqrt{3} + i$$

$$(3) \text{ نفخ : } v = \sqrt{\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{4}} + i \sqrt{\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{4}}$$

(3) أعط الشكل العشري للعدد v^2 ، واستنتج أن

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(4) المستوى العددي \mathbb{C} مرسوم إلى حلق متعامد حاصله $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ يعبر التحويل S من \mathbb{C} نحو \mathbb{C} الذي يرمز إليه بالخط $M(z)$ بالخط

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z - \sqrt{3} \quad , \quad \text{بحيث} \quad M(z')$$

حدد المساحة (2) مجموعة الخط M من \mathbb{C} . حدد $\|\vec{OM}'\| = \sqrt{3} \|\vec{OM}\|$

25

المستوى العددي مرسوم إلى حلق متعامد حاصله $(0, \vec{u}, \vec{v})$

$$(E\theta) \quad z \in \mathbb{C} \quad z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0 \quad \text{بحسب المعادلة}$$

حيث θ زاوية حادة تنتمي إلى المجال $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ (1) أ. حل المعادلة (E θ)ب. لتكن z_1 و z_2 حلر المعادلة E_0 حدد

$$\arg(z_1) = \arg(z_2)$$

أكتب z_1 و z_2 على الشكل القطبي(2) لتكن n_1 و m_1 على التوالي z_1 و z_2 و z_3 في المستوى العدديمن أن الضرب nm_1, m_2 متساوي المتساوي ، أكتب(3) ليكن n من \mathbb{N}^*

$$(E) \quad z \in \mathbb{C} \quad , \quad z \in \mathbb{C} \quad z^{2n} - 2z^n + \frac{1}{\cos^2 n} = 0 \quad \text{بحسب المعادلة}$$

حدد حلول المعادلة (E) على الشكل المثلثي

26

لتكن θ عدد حقيقي من المجال $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

$$(E) \quad z^3 + 2\cos \theta (1 + \cos \theta)z + 1 + \cos^2 \theta = 0 \quad \text{بحسب المعادلة}$$

حل المعادلة (E) ، أكتب جميع قيم الشكل المثلثي بدلالة θ (2) حدد على الشكل المثلثي بدلالة θ الحد من المربعين z_1 و z_2 للعدد العددي

$$a = 2\cos^2 \frac{\theta}{2} (-\cos \theta + i \sin \theta)$$

(3) استنتج على الشكل المثلي بدلالة θ الجذور المربعة z_1, z_2 للعدد α

(4) نفع لكل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n + z_4^n$

بين أن لكل p حد N : $S_{2p+1} = 0$ و $S_{2p} = (-1)^{p+1} 2^p (\cos \frac{\theta}{2})^{2p} \cos(p\theta)$

27

نعبر عن الجسف f من \mathbb{C} نحو \mathbb{C} المعروف بماليبي :

حيث : $f(z) = z^2 - (1 - 2\cos \alpha)z + (1 - 2\cos \alpha)z - 1$ $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

(أ) حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$

(ب) من أن $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ واستنتج أنه إذا كان z حلًا للمعادلة :

$f(z) = 0$ فإما : \bar{z} حل لها أيضًا

ب. حدد α إذا علمت أن $f(z) = (z-1)(z^2 + \alpha z + 1)$

ج. استنتج حلول المعادلة $f(z) = 0$ بمرور إلى الحل العكسي z_0 و z_1

د. الحل الذي مرره العكسي هو $\sin \alpha$ و z_0 و z_1 إلى الحل الآخر

(3) أكتب على الشكل المثلي z_1 و z_2 و $z_3 - z_0$

(4) في المستوى العقدي الممسوب إلى معلم مناعد مخطط $(0, e_1, e_2)$

نعبر عن الخط A, B, C و D : $A(2, 2)$ و $B(2, 1)$ و $C(2, 2)$ و $D(2, 2)$

أ. أفسر أن المثلث ABC مناعد و الصالح ، أفسر A

ب. إذا كان B و C هما ليد بالسهل D و (C, D) و $(OA) \perp (BC)$

28

المسوى \mathbb{D} منسد ، اعلم مناعد مخطط $(0, e_1, e_2)$

نعبر عن المعادلة $(E) : z^2 - (1 + i \sin 2\theta)z + \frac{1}{2} i \sin 2\theta = 0$

حد θ - راعر حقيقي حد المثل $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(2) حل المعادلة (E) واعلم الحل المزدوج .

د. لنكن M^1, M^2, M^3 مجموعتين z_1, z_2 و I منسد SM^1, SM^2

أ. ماهي مجموعة النقط I عندما تنقص θ في $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

ب. برهن على أن مجموعة النقط M^1 و M^2 هي دائرتين يربط بينهما

ج. برهن أنه إذا كان : $M^1 \neq M^2$ فإن المستقيم $(M^1 M^2)$ له اتجاه غير متغير

د. اعلم θ

د. معلوم ، استنتج مناسيب لمرجع بسيطه في مناعد I و M^1 و M^2

تعتبر في المستوى \mathcal{P} المسسوب إلى معلم متعامد معينهم

29

$B(-1,0)$ و $A(1,0)$: النقط $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

بربط كل نقطة $M(\vec{z})$ بالنقطة $M'(\vec{z}')$ بحيث $\vec{z}\vec{z}'=1$

(1) أُنشئ M' وعلّمت أن : $\vec{z}=2(1+i)$

(2) و الأمالة العامة من أن المستقيم (AB) هو مماس للزاوية $(\vec{OM}, \vec{OM'})$

(3) بين أن : $\vec{OM} \times \vec{OM'} = \vec{OA}^2$

(4) أ. تحقّق من أن : $(\frac{\vec{z}+\vec{z}'}{2}-1)(\frac{\vec{z}+\vec{z}'}{2}+1) = (\frac{\vec{z}-\vec{z}'}{2})^2$

ب. استنتج أن : $IA \times IB = IM^2$ حيث I مماس $[MM']$

(5) من أن المستقيم (MM) هو مماس للزاوية (\vec{IA}, \vec{IB}) حيث $M \neq A$ و $M \neq B$

لكل n عدد صحيح طبيعي غير معدوم و q عدد صحيح

30

بعيت : $q(q+1)(q-1) \neq 0$

تعتبر في المستوى العقدي النقط A_0, A_1, \dots, A_{n-1}

المتصلة على التوالي z_0, z_1, \dots, z_{n-1}

ب. أ. السلسلة المبررة $\{A_k, q^k\} / 0 \leq k \leq n-1$ قبل مرجعاً G_n

(2) نضع : $z_n = 2 - \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n})$; $z_0 = 1$

أ. أحسب z_n لحق G_n بدلالة q و z_1 و z_0

ب. أحسب : $\operatorname{Re}(z_n)$ و $\operatorname{Im}(z_n)$ بدلالة q و z_1 و z_0

ج. حدد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(z_n)$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(z_n)$

المسسوب إلى معلم متعامد معينهم $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

31

تعتبر النقط $A(1,0)$ و $B(-1,0)$ ، الدائرتان T المعرفتان من $\{A\}$ و $\{B\}$

، \mathcal{P} و الذي يربط كل نقطة $M(\vec{z})$ بالنقطة $M'(\vec{z}')$ بحيث

$$\vec{z}' = \frac{\vec{z}-1}{1-\vec{z}}$$

(1) ليكن \mathcal{C} من $\{A\}$ و $\{B\}$

يسأل إذا كان \mathcal{C} فإن M نقطة صاعدة بـ T

(2) بب أن $1 = |z|$ و $\frac{z-1}{z-1}$ حقيقياً و $\frac{z'+1}{z'-1}$ حقيقياً

بم إعطى z, z' ولا هذا معاً لحد \bullet السأشح ناستعمال النقط M, M', B, A, O

(3) ليكن المستقيم $(D): x+y-2=0$ والناظر $E: x^2+y^2=4$ (20)

أ- نحذف z ب. $z = \frac{(1+i)(2e(3)+2m(3)-1)}{2-3}$

ب- استنتج أنه إذا كان: $M \in (D) \cap (E)$ فإن M' تنتمي إلى دائرة

بم زجدها

(4) بعبر النقطه $\begin{cases} z' = \frac{1}{2}(z+2) \\ |z| = \sqrt{2} \end{cases}$ (5)

بب أنه إذا كان z حل (5) فإن $z^3 - 4z^2 + 2z - 8 = 0$ بم حل النقطه (5)

لك m عدد \neq عدداً غير معدوم . بعبر \mathbb{C} المعادله

32

(E): $z^2 - (3m-2z)z + 2m^2 - 4mz = 0$

(1) حل المعادله (E).

(2) في هذا السؤال $m = 1$. لك z_1, z_2, z_3 حل المعادله

(E) بحيث $|z_1| < |z_2|$

أ- أكتب كلامن z_1 و z_2 على الشكل الثلاثي.

ب- بعبر z . $(-z)$ هو حد m لك z بم استشرح علو

الشكل العنصرى z . لك z المكعبه الأقرب z_2

(3) المسوى مسووب إلى جعله متعامد مسطهم مناسر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

لك A, B, C النقط إلى الخافض علو الدوالي $z, 2m, 3m-2z$

وافترضه أن m ليست تخيلياً هرقاً .

أ- بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية .

ب- خارج المثلث ABC . نسمى النقطه D بحيث يكون المثلث BCD

مساوي الساقين وقامم الزاويه D . لك D لحظ النقطه D

بين أن: $z = \frac{3m-2z+2-2i}{2}$ أو $z = \frac{3m+2i-m-2-2i}{2}$

ج- حدد m لكي يكون الرباعي $ABDC$ مربعاً .

33 نعتبر في \mathbb{C} المعادلة : $|z+1| = |z-1|$ (1)

- (1) بين أن حلول المعادلة (1) هي أعداد حقيقية .
 (2) نعتبر في \mathbb{C} المعادلة : $(z-1)^3 = z^3 + 1$ (2)
 أ- استنتج من (1) أن حلول المعادلة (2) أعداد حقيقية .
 ب- حل المعادلة (2) ثم بين أن حلولها يمكن أن يكتب على شكل $z = km\pi$ ، حدد قيم m .
 (3) اعلم طريقة ثانية لحل المعادلة (2) ثم استنتج القيمة العددية للعدد $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

34 نعتبر التطبيع P من \mathbb{C} نحو \mathbb{C} المعروف بمبايلي

$$P(z) = z^3 - (6+3i)z^2 + (3+12i)z - 9(z+3i)$$

- (1) بين أن المعادلة : $P(z) = 0$ تقبل حلًا تخيليًا حرم وحيد z_2 اسم جديدة .
 ب- حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$. نمرر للحل المتحركات z_1 و z_2 و z_3 .
 (2) لنكتب m_1 و m_2 و m_3 صور الأعداد z_1 و z_2 و z_3 على التوالي .
 أ- بين أن المثلث $m_1 m_2 m_3$ متساوي الأضلاع .
 ب- أُنشئ النقط m_1 و m_2 و m_3 .

35 نعتبر في \mathbb{C} الدوالية : $P(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1$

حيث : $\alpha \in [0, \pi]$

- (1) أ- أحسب $P(1)$ ، حدد الأعداد a و b و c حيث $P(z) = (z-1)(az^2+bz+c)$
 ب- حل في \mathbb{C} المعادلة : $P(z) = 0$ (2)
 نمرر لحلول هذه المعادلة z_1 و z_2 و z_3 حيث $z_1 = 1$ و $z_2 = \cos\alpha$ و $z_3 = \sin\alpha$.
 أ- حدد معيار وعلامة لكل من z_1 و z_2 و z_3 .
 ب- حدد قيم العدد α التي من أجلها الأعداد :
 $(1+z_1)$ و $(1+z_2)$ و $(1+z_3)$ في هذا الترتيب تكون
 حدود متناهية هندسية .

36

ليكن n من \mathbb{N} .

$$S = \sum_{k=0}^n \sin(2k) \quad ; \quad C = \sum_{k=0}^n \cos(2k) \quad \text{نضع}$$

$$(1) \text{ أحسب : } C + iS$$

$$(2) \text{ استنتج أن : } C = \cos(n) \frac{\sin(n+1)}{\sin(1)} \quad ; \quad S = \sin(n) \frac{\sin(n+1)}{\sin(1)}$$

$$(3) \text{ بب أن : } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n |\cos k| \geq \frac{n}{4}$$

37

ليكن \mathbb{N} مجموعة الأعداد العديدة التي مضارها 1

$$(1) \text{ بب أن : } -1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \quad ; \quad -1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{N}$$

$$(2) \text{ ليكن } a, b \text{ عددين عقديين من } \mathbb{N}$$

$$1 - \text{بب أن : } \frac{(a+b)^2}{ab} = a\bar{b} + \bar{a}b + 2$$

$$2 - \text{امسح أن : } \frac{(a+b)^2}{ab} \text{ عدد حقيقي موجب}$$

$$(3) \text{ ليكن } z_1 \text{ و } z_2 \text{ عددين عقديين غير متعديين}$$

يعتبر z المستوى العددي المرسوم إلى z على شكل متعامد، فمثلهم مناسر $(0, \vec{u}, \vec{v})$ التفاضل M_1 و M_2 اللذين لهما على التوالي z_1 و z_2 ، وليكن λ احد

$$\text{المتجه } G \text{ مربع الشكل المرسوم } \left\{ (M_1, \frac{1}{|z_1|}), (M_2, \frac{1}{|z_2|}) \right\}$$

$$\text{نضع : } \alpha = \frac{z_1}{|z_1|} \quad ; \quad b = \frac{z_2}{|z_2|}$$

$$1 - \text{من أن : } \frac{\lambda^2}{z_1 z_2} = \frac{(a+b)^2}{ab} \times \frac{|z_1||z_2|}{(|z_1| + |z_2|)^2}$$

$$2 - \text{نفترض أن : } a+b \neq 0$$

$$\text{يبين أن المسعييم } (OG) \text{ هو حامل متجه الزاوية الموجهة } (\vec{OM_1}, \vec{OM_2})$$

$$(4) \text{ ليصف : } \text{تعبر التجهين } A \text{ و } B \text{ اللذين لهما على التوالي}$$

$$-2 + 2i \quad ; \quad 2 + i$$

$$\text{حدد معادله ديكارتية لحامل متجه الزاوية الموجهة } (\vec{OA}, \vec{OB})$$

نعتبر الدالة f_a من $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ نحو $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ المعرفة بما يلي:

$$a \in \mathbb{C}^* \quad f_a(z) = \frac{az}{z-a}$$

$$f_a(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 \operatorname{Re}(a) = |a|^2 \operatorname{Re}(z) \quad \text{نستأن}$$

$$(2) \text{ نضع } z = a - 1 \text{ و } \operatorname{Re}(z-a) = 0 \text{ (28) و } \operatorname{Im}(z-a) = 1 \text{ حيث } z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$$

أعني: $|f_a(z) - a|$ بدلالة 2 و $|a|$ وأجيب

$$\operatorname{Im}(f_a(z) - a) \text{ بدلالة } 0 \text{ و } \operatorname{Im} a$$

(3) نضع $a = -1 + i$ ، نحدد المستوى العقدي \mathcal{D} المجموعات:

$$(\mathcal{D}) = \{M(z) \mid \operatorname{Im}(f_a(z) - a) \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}\}$$

$$(\mathcal{E}) = \{M(z) \mid |f_a(z) - a| = 2\}$$

$$(\mathcal{F}) = \{M(z) \mid f_a(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$$

(4) حدد (E) و (F) و (D) ، حدد مستقيم أويلر $A(a)$ ، حدد M من أجل M معادلة ديكارتية له.

$$b. \text{ ليكن } z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a\} \text{ و } B(z_0) \text{ دائرة وحدة } B \in (\mathcal{D}) \cap (\mathcal{F})$$

أكتب $f_a(z_0)$ على الشكل $re^{i\theta}$ ثم حدد z_0

ج- أكتب (E) و (F) و (D).

(4) نعتبر التحويل M المعرفة من \mathcal{D} نحو \mathcal{F} بحيث

$$M(z) = w \Leftrightarrow z = (-1+i)w + 3i - 4$$

يبين أن M هو مركب يحاك ودوران ثم حدد صور (F) و (D) بـ M

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة: $(2) \quad \left| \frac{z-i}{z+3i} \right| = \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^2$

(1) تبين أن z يكون حلاً للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان

$$\left(\frac{z-i}{z+i} \right)^2 = z \quad \text{و} \quad |z+3i| = 2|z|$$

(2) ليكن المجموعة: $(\mathcal{E}) = \{M(z) \in \mathcal{D} \mid |z+3i| = 2|z|\}$

بين أن (E) دائرة ثم حدد مركزها ونصفها

(3) ليكن المجموعة: $(\mathcal{F}) = \{M(z) \in \mathcal{D} \mid \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^2 = z\}$

بين أن (F) هي اتحاد مستقيمين متعامدين

(4) استنتج عدد حلول المعادلة (E).

40

ليكن θ من \mathbb{R} بحيث: $\theta \neq \pi$ [4π] و z من \mathbb{C}

$$P(z) = z^4(1 + 4\cos^2(\frac{\theta}{2})) - 4z^2\cos\theta + 4iz\sin 2\theta + 8\sin^2\theta$$

(1) بين أن المعادلة: $P(z) = 0$; $z \in \mathbb{C}$ لا تقبل حلاً من مرافقان(2) نضع: $z = u + iv$ بحيث u, v من \mathbb{R} أحسب: $Q(u) = P(u + iv)$ (3) عمل في \mathbb{C} الحدودية: $P(z)$ علماً أنها تقبل حلاً على الشكل $\alpha(1+i)$ بحيث α عدد حقيقي.

41

نعتبر الدالة T المعرفة من $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -1\}$ نحو \mathbb{C} بمالي:

$$T(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

(1) نعتبر في \mathbb{C} المعادلة: $T(z) = \frac{1}{z+1}$ (2)ليكن z_1 و z_2 هما حلبي المعادلة (1) بحيث: $|z_1| > |z_2|$ 1- حدد z_1 و z_2 .ب- أكتب z_1 و z_2 على الشكل الثلاثي.2- حدد الجذور من الرتبة الرابعة للعدد z_2 ثم استخرج $\cos \frac{\pi}{8}$ و $\sin \frac{\pi}{8}$ (3) لنك A و B و C صور z_1 و z_2 و $1+i$ و $\sqrt{3}-3-2\sqrt{3}i$ على التواليأحسب النسبة: $\frac{BC}{BA}$ و حدد قياساً للزاوية (\vec{BA}, \vec{BC}) .(3) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $T(z)$ تحويلي صرف.

42

نعتبر الدالة f المعرفة من $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -1\}$ نحو \mathbb{C} بمالي:

$$f(z) = \frac{z(3-z)}{z+1} \quad \text{ولكن } A(z) \text{ و } A'(-z)$$

نعتبر الدالة F المعرفة من $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -1\}$ نحو \mathbb{C} بمالي:

$$F: M(z) \rightarrow M'(f(z))$$

(1) بين أن: $|f(z)| = |z|$, $f(z) = z(3-z)/(z+1)$ و $z = -1-3i$ حسب $z \neq -1$ ب- بين أن: $|z| = 1 \Rightarrow f(z) = -z$ (2) حدد مجموعة النقط الصاعدة بـ f من \mathbb{R}^+ (3) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون $f(z)$ تحويلي صرف.(4) بين أن: $f(z) = \frac{z(3-z)}{z+1} = \frac{3z-z^2}{z+1}$ و $f(z) = \frac{-z(3+z)}{1+z^2}$ و $f(z) = \frac{3z-z^2}{1+z^2}$ (5) استنتج أن المنعكس $\vec{AM'}$ و \vec{AM} مستقيمان وأن $(AM) \perp (MM')$ (6) اعم طريقة هندسية لا نشاء صور M بالمخطط F .

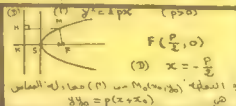
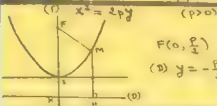
المخروطيات



(٤) ليكن (D) مستقيم و $F \notin D$ و $e > 0$
 المجموعة $\{M \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{MF}{MH} = e\}$ تسمى المخروطية
 هو البؤرة F والدليل (D) والنباذ المركز F
 ويرمز لها : $\Gamma = \Gamma(F, (D); e)$

(٥) الشلحلم : إذا كان $e = 1$ فإن المخروطية (٣) تسمى شلحلم.
 (٣) شلحلم إذا وقع إذا كانت معادلة 3 مع معامد مستقيم تكتب على

أحد الشكلين : $y^2 = 2px$ أو $x^2 = 2py$ ($p \neq 0$)

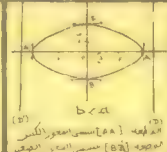
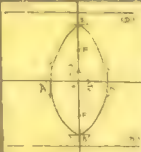


و النقطه $M_0(x_0, y_0)$ مع (٣) معادلة المماس
 $\Delta M_0 = p(x + x_0)$ هي

(3) إذا هليلج : إذا كان $0 < e < 1$ فإن المخروطية (٣) تسمى إهليلج.
 (٣) إهليلج إذا وقع إذا كانت معادلة 3 مع معامد مستقيم تكتب على

النسكل : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$)

$a = b$	$0 < e < 1$	$0 < b < a$	المعادلة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
دائرة مركزها O ونشاعها R = a	$e = \frac{c}{a}$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $F(0, -c)$, $F(0, c)$ $(D) y = -\frac{b^2}{c}$, $(D) y = \frac{b^2}{c}$ $A(0, -1)$, $A(0, 1)$	$e = \frac{c}{a}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $F(-c, 0)$, $F(c, 0)$ $(D) x = -\frac{a^2}{c}$, $(D) x = \frac{a^2}{c}$ $A(-a, 0)$, $A(a, 0)$	النباذ المركزي البؤرات الدليلات الرؤوس



النباذ المركزي
 الدليلات
 الرؤوس
 النقطه [A] تسمى البؤرة الكبرى
 النقطه [B] تسمى البؤرة الصغرى

معادلة المماس : $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$
 (٣) مع (٢) 3 نقطه (٣) مع (٣)
 هي : $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

العرف الثوري ϵ خليج لنك F و F' نقطتان متطابقتان من المستوى \mathcal{P}

و a عدد حقيقي موجب قطعاً بحيث $2a > FF'$

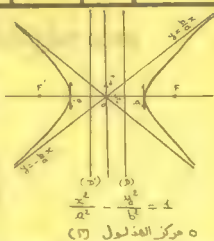
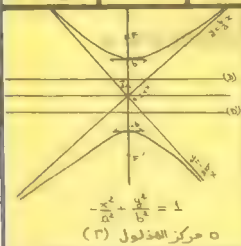
المجموعة هي $\{ME\mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\}$ هي الإقليم ذو البؤرتين

F و F' والذي مسافة رأسه A نسبة الضمير إلى محور x البؤري هي $2a$.

(4) المدلول: إذا كان: $\epsilon > 1$ فإن المعرف (\mathcal{P}) يسمى مدلول.

* (\mathcal{P}) مدلول إذا قطع إذا وقع F إذا كانت معادلتها في معلم متعامد مسلم
نكتب على أحد السكبي: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

المعادلة المعطاة	c	المساعد المركزي	البؤرتان	المدلول	المضارب
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$e = \frac{c}{a}$	$F(c, 0)$ $F'(-c, 0)$	(D) $x = \frac{a^2}{c}$ (D') $x = -\frac{a^2}{c}$	(A) $y = \frac{b}{a}x$ (A') $y = -\frac{b}{a}x$
$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$e = \frac{c}{b}$	$F(0, c)$ $F'(0, -c)$	(D) $y = \frac{b^2}{c}$ (D') $y = -\frac{b^2}{c}$	(A) $y = \frac{b}{a}x$ (A') $y = -\frac{b}{a}x$



العرف الثوري المدلول لنك F و F' نقطتان متطابقتان من المستوى \mathcal{P}

و a عدد حقيقي موجب قطعاً بحيث: $2a < FF'$

المجموعة هي $\{ME\mathcal{P} \mid |MF - MF'| = 2a\}$ هي المدلول ذو البؤرتين F و F'

والذي مسافة رأسه A و A' هي $2a$.

معادلة المدلول: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ في نقطة $M_0(x_0, y_0)$ من (D)
هي $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

المخروطيات

1

المسوى \mathcal{C} منسوب إلى معلم متعامد منتهى $(0, 2, 1)$

نعتبر (1) مجموعة النقط $M(x, y)$ من \mathcal{C} التي تحقق :

$$\frac{y^2}{2} = x^2 - 2x^2 + 1$$

(1) بين أن (1) هو اتحاد مخروطيين (1) و (2).

(2) حدد العناصر المميزة للمخروطين (1) و (2).

(3) أنشئ (3).

الجواب : (1) لتكن $M(x, y)$ نقطة من المسوى \mathcal{C} لدينا :

$$M(x, y) \in (1) \Leftrightarrow (x^2 - 2x^2) - \left(\frac{y^2}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + \frac{y^2}{2} - 1)(x^2 - \frac{y^2}{2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 - \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow M(x, y) \in (1) \cup (2)$$

بعبارة أخرى : (1) هو اتحاد (2) و (3) حلول

$$(2) : x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

وبالتالي : (1) = (2) \cup (3)

(2) العناصر المميزة لـ (2) هي :

$$\text{لدينا : } (2) : x^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \quad \text{حيث : } a=1, b=2, c>b$$

$$\text{لدينا : } c^2 = b^2 - a^2 = 3 \quad \text{إذن : } c = \sqrt{3}$$

ومنه : البؤاعد المركزين لـ (2) هو : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

→ البؤرتان لـ (2) هما : $F_1(0, -1)$ و $F_2(0, 1)$

أي : $F_1(0, -\sqrt{3})$ و $F_2(0, \sqrt{3})$

* الدليلان لـ (2) هما : $(D_1) : x = \frac{b^2}{c}$ و $(D_2) : x = -\frac{b^2}{c}$

أي : $(D_1) : x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ و $(D_2) : x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$

→ الرؤوس لـ (3) هي : $A(1, 0), A'(-1, 0), B(0, +2)$ و $B'(0, -2)$

العناصر المبنية للعدول (٢):

لدينا: $(٢): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ حيث: $a=2$ و $b=2$

لدينا: $c^2 = a^2 + b^2 = 5$ إذن: $c = \sqrt{5}$

ومنه: «التباعد المركزي لـ (٢) هو: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$

«البؤرتان لـ (٢) هما: $F_2(c, 0)$ و $F_2'(-c, 0)$

أي: $F_2(\sqrt{5}, 0)$ و $F_2'(-\sqrt{5}, 0)$

«القطبان لـ (٢) هما: $(D_2): x = \frac{a^2}{c}$ و $(D_2'): x = -\frac{a^2}{c}$

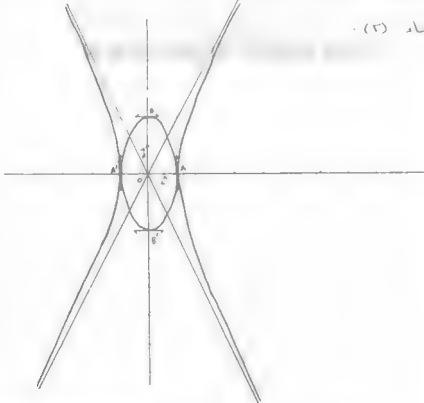
أي: $(D_2): x = \frac{4}{\sqrt{5}}$ و $(D_2'): x = -\frac{4}{\sqrt{5}}$

«المقاربات لـ (٢) هما: $(\Delta_2): y = \frac{b}{a}x$ و $(\Delta_2'): y = -\frac{b}{a}x$

أي: $(\Delta_2): y = 2x$ و $(\Delta_2'): y = -2x$

«مركز (٢) هو $O(0,0)$

(٣) انشاء (٢).



2

المستوى \mathcal{P} محسوب إلى معلم معامد مستقيم $(0, \vec{i}, \vec{j})$ لك (\mathcal{C}) مجموعة القطع $M(x, y)$ التي تحقق $y^2 - 2y - 2x - 1 = 0$ (1) حدد لمبعده والعناصر لـ (\mathcal{C}) (2) اعط معادلة العماس (\mathcal{C}) عند النقطة $A(2, 3)$ (3) س أ ب المستقيم (\mathcal{D}) الذي معادلته $x + 2y + 1 = 0$. عماس لـ (\mathcal{C}) (4) أسس (\mathcal{C}) الجواب : (1) لكت $M(x, y)$ نقطة من المستوى \mathcal{P} لذا $M(x, y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = 2(x+1)$$

$$x(-1, 1) \quad \mathcal{C} \quad \begin{cases} x = x+1 \\ y = y-1 \end{cases} \quad \text{نفع :}$$

معادلة (\mathcal{C}) في المعلم (n, \vec{i}, \vec{j}) : $y^2 = 2x$ ($p=1$)صه (\mathcal{C}) سلاحم رؤنه $F(\frac{1}{2}, 0)$ بالنسبة للمعلم (n, \vec{i}, \vec{j}) $(0, \vec{i}, \vec{j})$ بالنسبة للمعلم $F(-\frac{1}{2}, 0)$ وذلك لـ (n, \vec{i}, \vec{j}) بالنسبة للمعلم (\mathcal{D}) $x = -\frac{1}{2}$ $(0, \vec{i}, \vec{j})$ بالنسبة للمعلم (\mathcal{D}) $x = -\frac{3}{2}$ ورأسه $A(-1, 1)$ (2) ليكن (\mathcal{D}) العماس لـ (\mathcal{C}) عند النقطة $A(2, 3)$ لذا $A \in (\mathcal{C})$ ، إذن معادلة (\mathcal{D}) في المعلم (n, \vec{i}, \vec{j})

$$2(y-1) = (x+1) + 1 \quad \text{أي :} \quad y y_0 = p(x+x_0)$$

$$(\mathcal{D}) : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{ومنه :}$$

(3) لست أ ب $x + 2y + 1 = 0$ (\mathcal{D}) عماس لـ (\mathcal{C}) لكتن : $M(x, y)$ نقطة من المستوى \mathcal{P}

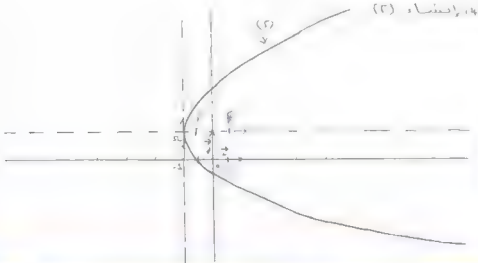
$$M(x, y) \in (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ y^2 - 2y - 2x - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 1 \\ y^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$(r) \cap (\delta) = \{0(2, -2)\}$$

ومنه :

وبالتالي : (δ) مماس لـ (r) .



3

المستوى (3) مماس بـ إلى المعلم بمعاد معطى $(0, 2, \vec{\delta})$

لك (r) معطى عند النقطة $M(x, y)$ من المستوى (3) . حسب

$$y^2 - 2y - 2|x| - 3 = 0$$

1. نرى أن (r) هو اتحاد جزئين من سطحين

(2) 'أيسر' (3)

الجزء (1) : لك $M(x, y)$ على حد المستوى (3)

$$M(x, y) \in (3) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 2|x| - 3 = 0$$

لدينا :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (y-1)^2 = 2(x+2) \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ (y-1)^2 = -2(x-2) \end{cases}$$

نعتبر الشلحين (P_1) و (P_2) بحيث :

$$(P_2) \quad (y-1)^2 = -2(x-2)$$

$$(P_1) \quad (y-1)^2 = 2(x+2)$$

$$n_2(2, 1) = \begin{cases} x = x-2 \\ y = y-1 \end{cases}$$

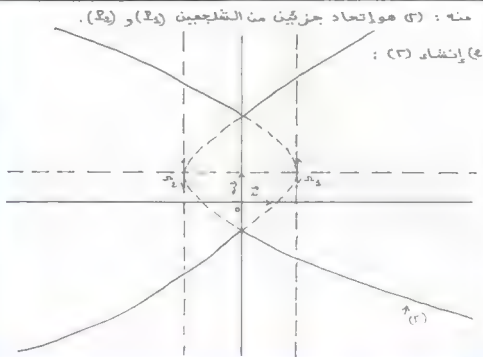
$$n_1(-2, 1) = \begin{cases} x = x+2 \\ y = y-1 \end{cases} \quad \text{نضع :}$$

$$(n_2, \vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) \text{ المعلم } (P_2) \text{ معادله}$$

$$(n_1, \vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) \text{ المعلم } (P_1) \text{ معادله}$$

$$y^2 = -2x$$

$$y^2 = 2x$$



المستوى (3) منحني، الف معلم صناعه معنهم $(0, 2, \vec{f})$

4

لتكن (E_m) مجموعة المعلم $m(x, y)$ من المستوى (3) بحيث :

$$4mx^2 + y^2 - 8x = 0 \quad \text{حيث } m \in \mathbb{R}$$

(1) حدد سعة النيم m طبيعة (E_m)

(2) افسر المنحنيين : $(E_1) \cdot (E_2)$

الاجواب : (1) لنك $m(x, y)$ نقطة من المستوى (3).

$$m(x, y) \in (E_m) \Leftrightarrow 4mx^2 + y^2 - 8x = 0$$

لجس .

$$y^2 = 8x \quad m=0 \quad \text{فإن} =$$

ومنه : (2) تلجم .

$$m(x, y) \in (E_m) \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{m}x + \frac{y^2}{4m} = 0 \quad m \neq 0 \quad \text{فإن} =$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{4m} = \frac{1}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{m}\right)^2}{\left(\frac{1}{m}\right)^2} + \frac{\frac{y^2}{4m}}{\frac{1}{m^2}} = 1$$

إذا كان $m > 0$ فإن: (ع) إهليج أو دائرة.

إذا كان $m < 0$ فإن: (ع) هذلول.

(د) إنشاء المنحنيين: (ع) : (ع.د)

لدينا:

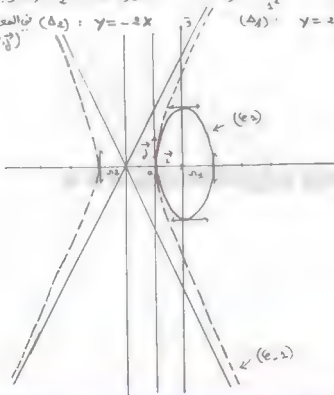
$$(د) : \frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \quad \text{إهليج مركزه } (1,0) \text{ ورؤوسه}$$

$A(1,0)$ و $A'(-1,0)$; $B(0,2)$ و $B'(0,-2)$ العلم

$$(ع.د) : \frac{(x+1)^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \quad \text{هذلول مركزه } (-1,0) \text{ ومقارباته.}$$

$$(د.ع) : y = -2x \quad (د.د) : y = 2x$$

(ع.د.ع)



المستوى (3) منسوب إلى معلم متعامد معلوم $(0,2, \frac{1}{3})$

5

بغير المشتق (د) الذي معادلته: $x = \frac{16}{3}$

(1) إعط معادلة ديكارتية لإهليج (2) الذي دليله (3) وبؤرتيه النقطه 0

وتباعد المركز ي $e = \frac{3}{5}$

(ع) أكتب (2)

(1) ليكن M نقطة من (Γ) سمح $\theta \equiv (\vec{x}, \vec{OM}) \in [0, \pi]$

1- بين أن : $OM = \frac{16}{3 + 5 \cos \theta}$

2- بفرض أن $|O| < \frac{\pi}{2}$ المسع (OM) يعطى (Γ) من (Γ, I) : M'

أثبت : $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{1}{OI}$ ، بين أن : $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{1}{OI}$

الاجواب : (1) لنجد الإهليج $(\Gamma) = \Gamma(0, (0), c)$

لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى (3) لدينا :

$$M(x, y) \in (3) \Leftrightarrow \frac{MO}{d(M, (0))} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{5} \times \frac{|x - \frac{16}{3}|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

$$\Leftrightarrow 25(x^2 + y^2) = 9(x - \frac{16}{3})^2$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 25y^2 = 9x^2 - 96x + 256$$

$$\Leftrightarrow 16(x+3)^2 + 25y^2 = 400$$

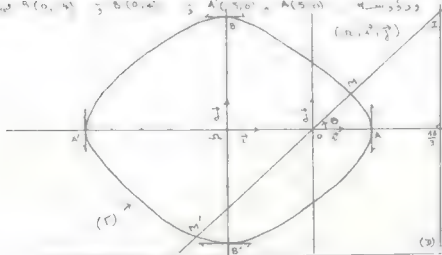
$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

وهذه معادلة الإهليج (Γ) هي : $\frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

(2) لإنشاء الإهليج (Γ) .

لدينا $(\Gamma) : \frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ مركزه $O(-3, 0)$

نقطتي $A(5, 0)$ و $A'(-5, 0)$ و $B(0, 4)$ و $B'(0, -4)$ هي النقاط



$$\begin{cases} x = OM \cos \theta \\ y = OM \sin \theta \end{cases} \quad \text{د) لدينا:} \quad \vec{r} \cdot \vec{OM} = 0 \quad [2\pi]$$

$$M \in (r) \Leftrightarrow OM = \frac{2}{5} d(M, D) \quad \text{ولدينا:}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad x = \frac{16}{3} \cdot \frac{2}{5} &\Leftrightarrow OM = \frac{2}{5} |OM \cos \theta - \frac{16}{3}| \\ \Leftrightarrow OM = \frac{2}{5} OM \cos \theta - \frac{16}{5} \quad \text{أو} \quad OM = -\frac{2}{5} OM \cos \theta + \frac{16}{5} \\ \Leftrightarrow OM = \frac{-16}{5-3 \cos \theta} \quad \text{أو} \quad OM = \frac{16}{5+3 \cos \theta} \end{aligned}$$

$$M \in (r) \Leftrightarrow OM = \frac{16}{5+3 \cos \theta}$$

$$(\vec{r}, \vec{OM}') \equiv \theta + \pi \quad [2\pi] \quad \text{ب - لدينا:}$$

$$OM' = \frac{16}{5+3 \cos(\pi+\theta)} = \frac{16}{5-3 \cos \theta} \quad \text{مطابق:} \quad M' \in (r) \quad \text{فإن:}$$

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{1}{16} (5+3 \cos \theta) + \frac{1}{16} (5-3 \cos \theta) \quad \text{وهـ،}$$

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{5}{8} \quad \text{إذن:}$$

$$\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{1}{16} (5+3 \cos \theta) - \frac{1}{16} (5-3 \cos \theta) \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{3}{8} \cos \theta \quad \text{إذن:}$$

$$\cos \theta = \frac{16}{3} \times \frac{1}{OI} \quad \text{أي:} \quad \cos \theta = \frac{\frac{16}{3}}{OI} \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{3}{8} \times \frac{16}{3} \times \frac{1}{OI} \quad \text{وهـ:}$$

$$\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{2}{OI} \quad \text{وبالتالي:}$$

المستوى (3) ممسور ب، الزاوية متعامدة متعامدة متعامدة (3, 2, 1)

6

نعبر (3) مجموعاً من النقط (x, y) من (3) بحيث

$$xy - x - y = 0$$

نعبر النقطة (1, 1) ، المقياس: $\vec{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j})$ و $\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j})$

(1) حدد معاداة، بكارية المنحني (3) في المعلم (3, 2, 1)

(2) حدد طبيعة، العناصر المميزة للمنحني (3) في المعلم (3, 2, 1)

7

المستوى \mathcal{P} منسوب إلى معلم ضعا عدمي $(0, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر المعنى (ع) الذي معادلته : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$ (يكن (P) المعنى الذي معادلته : $(x-y)^2 - 4(x+y) + 4 = 0$

(1) بين أن (ع) جزء من (P).

(2) عبر النقطة $M(\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$ والمتجهين \vec{i} و \vec{j} المعرفين بمايلي :

$$\begin{cases} \vec{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{y} \\ \vec{j} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{y} \end{cases}$$

1- أكتب معادلة (P) في المعلم (M, \vec{i}, \vec{j}) .

ب- استرجع طبيعة (P) وحدد إحداثيات رأسه ومعادلة دليته في المعلم

 (M, \vec{i}, \vec{j}) .ج- بين أن (ox) و (oy) محور المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$ مماسان للمعنى (P).

(3) ارسم المعنى (ع).

الجواب : (1) لكي $M(x, y)$ نقطة من المستوى \mathcal{P} لدينا :

$$M(x, y) \in (E) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x + y - 2 = -2\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4x - 4y = 4xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 4(x+y) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 - 4(x+y) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow M(x, y) \in (P)$$

وضه : $(E) \subset (P)$ (2) 1- ليكن (x, y) زوج إحداثيين نقطة M في المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$ و (x, y) زوج إحداثيين النقطة M في المعلم (M, \vec{i}, \vec{j})

$$\vec{OM} = \vec{OM} - \vec{OM} \Leftrightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = (x - \frac{x}{2})\vec{i} + (y - \frac{y}{2})\vec{j} \text{ لدينا.}$$

$$\Leftrightarrow x(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}) + y(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}) = (x - \frac{x}{2})\vec{i} + (y - \frac{y}{2})\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\vec{j} = (x - \frac{x}{2})\vec{i} + (y - \frac{y}{2})\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = x - \frac{x}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) = y - \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) + \frac{x}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$m(x, y) \in (E) \Leftrightarrow (x-y)^2 - 4(x+y) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4\sqrt{2}x - 4 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 2\sqrt{2}x$$

ومنه معادلة (E) في المعلم (n, \vec{i}, \vec{j}) هي: $y^2 = 2\sqrt{2}x$

ب- لدينا (E) ضلحهم رأسه $n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ وبؤرتاه $F(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ و $F'(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ ودليله

المستقيم (D) الذي معادلته: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ في المعلم (n, \vec{i}, \vec{j}) .

ج- لنبين أن (ox) و (oy) مماسان للمنحنى (E).

$$m(x, y) \in (E) \cap (ox) \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases} \quad \text{أيضا.}$$

ومنه: $(E) \cap (ox) = \{A(2, 0)\}$ إذن (ox) مماس لـ (E).

$$m(x, y) \in (E) \cap (oy) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

ومنه: $(E) \cap (oy) = \{B(0, 2)\}$ إذن (oy) مماس لـ (E).

ونلاحظ أن A و B سميان إلى كل من (E) و (D) و (E) و (D).

لدينا $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$ زوج إحداثيات النقطة A و $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ زوج إحداثيات النقطة B

$$\begin{cases} x-y = \sqrt{2}(x-\frac{1}{2}) \\ x+y = \sqrt{2}(y-\frac{1}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \end{cases} \quad \text{في المعلم } (n, \vec{i}, \vec{j})$$

مماس (E) في النقطة A هو المصم الذي معادلته: $-y\sqrt{2} = \sqrt{2}(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$

أي: $y = -x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ في المعلم (n, \vec{i}, \vec{j}) .

إذن: $y = 0$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1) - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه: $y = 0$

وإذن محور الأفقيل مماس لـ (E) في النقطة A.

مماس (E) في النقطة B هو المستقيم الذي معادلته: $y\sqrt{2} = \sqrt{2}(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$

أي: $y = x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ في المعلم (n, \vec{i}, \vec{j}) .

إذن: $x = 0$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه: $x = 0$

وإذن: محور الإرتياب لـ (E) في النقطة B.

(D) إنشاء المنحنى (E):

$$m(x, y) \in (E) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} - \sqrt{y}$$

الجواب : (أ) ليكن (x, y) زوج إحداثيتي نقطة M في المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$

وليكن (x, y) زوج إحداثيتي النقطة M في المعلم $(1, \vec{i}, \vec{j})$

$$\vec{OM} = \vec{OM} - \vec{OM} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = (x-1)\vec{i} + (y-1)\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})\right) + y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})\right) = (x-1)\vec{i} + (y-1)\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\vec{j} = (x-1)\vec{i} + (y-1)\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) = x-1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) + 1 \end{cases}$$

$$M(x, y) \in (S) \Leftrightarrow xy - x - y = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = 1$$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \quad \text{وهو معادلة (٢) في المعلم (١, \vec{i}, \vec{j})}$$

$$(2) \text{ بما أن معادلة (٢) في المعلم (١, \vec{i}, \vec{j}) هي :}$$

$$b = a = \sqrt{2}$$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

فإن (٢) هذا لول مركزه $(1, 0)$

$$c = 2 \quad \text{في المعلم (١, \vec{i}, \vec{j}) لدينا : } c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{أي :}$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{2} \quad \text{التباعد المركزي :}$$

$$F'(-2, 0) \quad \text{و} \quad F(2, 0) \quad \text{البؤرتان :}$$

$$(2') \quad x = -1 \quad \text{و} \quad (3') \quad x = 1 \quad \text{الدليلتان :}$$

$$(4') \quad y = -x \quad \text{و} \quad (5') \quad y = x \quad \text{المقاربات :}$$

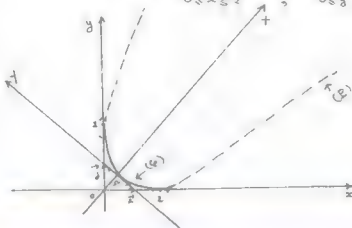
$$m(x, y) \in (e) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{y} = \frac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$0 \leq y \leq 2$$

منه



المستوى P محسوب إلى معلم متعامد مسطح $(0, 2, \vec{e})$

8

نعتبر (Γ_m) مجموعة التقاطع $M(x, y)$ من Γ بحيث -

$$(\Gamma_m) : (m-2)x^2 + my^2 - m(m-2) = 0$$

(1) نلاحظ ان m قيمة المقنونة $\neq 0$

(2) نعرض ان $m(m-2)$ نسبي إلى \mathbb{R}^* ، ونسري المقنونة $A(1, 1)$

1- أثبت أنه من المقنونة A يمر مستقيمان (Γ_1) و (Γ_m) ، نجد

$$m' > 2 \quad \text{و} \quad 0 < m' < 2$$

ب- ثبت أن المماسين للمحسين (Γ_1) و (Γ_m) عند المقنونة A متعامدان.

(3) أثبت أنه (Γ_1) و (Γ_m) في نفس المعلم.

$$\text{نلاحظ} \quad \sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0,8 \quad \text{و} \quad \sqrt{2} \approx 1,4 \quad \text{و} \quad \sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 1,8$$

الجواب : (1) قيمة (Γ_m) .

$$m(x, y) \in \Gamma_m \Leftrightarrow (m-2)x^2 + my^2 = m(m-2)$$

لدينا

$$+ \text{ إذا كان: } m(m-2) = 0 \text{ أي: } m=0 \text{ أو } m=2$$

$$+ \text{ إذا كان: } m=0 \text{ فإن: } -2x^2 = 0 \text{ أي: } x=0$$

ومنه: (Γ_0) هو المستقيم الذي معادلته: $x=0$.

$$+ \text{ إذا كان: } m=2 \text{ فإن: } 2y^2 = 0 \text{ أي: } y=0$$

m	-∞	0	2	+∞
m	-	+	+	+
m-2	-	-	+	+

ومنه (Γ_m) هو المستقيم الذي معادلته: $y=0$.

أي إذا كان: $m(m-2)=0$ أي:

$$M(x,y) \in (\Gamma_m) \Leftrightarrow \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{m-2} = 1 \quad \text{فإن:}$$

m	-∞	0	2	+∞
طبيعة (Γ_m)	\emptyset	منحني	مدلول	إهليج

(2) نفرض أن: $m(m-2) \neq 0$, نعتبر النقطة $A(1,1)$.

$$A(1,1) \in (\Gamma_m) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}: m-2 + m - m^2 + 2m = 0 \quad \text{أي:}$$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}: m^2 - 4m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{2} \quad \text{أو} \quad m = 2 + \sqrt{2}$$

ومنه $m' = 2 - \sqrt{2}$ و $m'' = 2 + \sqrt{2}$ بحيث $0 < m' < 2$ و $m'' > 2$.

إذن المنحنيان $(\Gamma_{m'})$ و $(\Gamma_{m''})$ يمران من النقطة A .

ب- معادلة المماس $(\Delta_{m'})$ للمنحني $(\Gamma_{m'})$ عند النقطة A هي:

$$\frac{x}{m'} + \frac{y}{m'-2} = 1 \quad \text{أي:} \quad \frac{x \times 1}{m'} + \frac{y \times 1}{m'-2} = 1$$

$$(\Delta_{m'}) : \frac{x}{2-\sqrt{2}} + \frac{y}{-\sqrt{2}} = 1 \quad \text{فإن:} \quad m' = 2 - \sqrt{2}$$

$$(D_2) \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} x \quad \text{و} \quad (D_3) \quad y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} x \quad : (\Gamma_{m'})$$

معادلة المماس $(\Delta_{m''})$ للمنحني $(\Gamma_{m''})$ عند النقطة A هي:

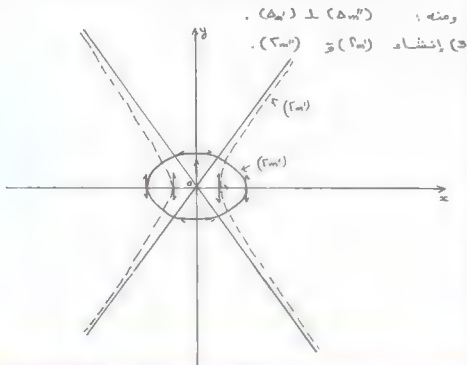
$$(\Delta_{m''}) : \frac{x}{m''} + \frac{y}{m''-2} = 1 \quad \text{أي:} \quad \frac{x \times 1}{m''} + \frac{y \times 1}{m''-2} = 1$$

$$(\Delta_{m''}) : \frac{x}{2+\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 1 \quad \text{فإن:} \quad m'' = 2 + \sqrt{2}$$

$$(D_2) \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} x \quad \text{و} \quad (D_1) \quad y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} x \quad : (\Gamma_{m''})$$

$$\vec{u}_{\Delta_{m''}} \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2+\sqrt{2}}} \right) \quad \text{و} \quad \vec{u}_{\Delta_{m'}} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2-\sqrt{2}}} \right) \quad \text{لدينا:}$$

$$\vec{u}_{D_2} \cdot \vec{u}_{\Delta_{m''}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} \times \frac{1}{2-\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4-2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$



9 المسوى Γ منسوب إلى معلم معامد مصطلح $(0, \vec{z}, \vec{\delta})$

لنك (Γ) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المسوى Γ بحيث :

$$x^2 + \frac{6}{5}xy + y^2 - \frac{8}{5} = 0$$

محاور المتجهين $\vec{\sigma} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{z} - \vec{\delta})$ و $\vec{\tau} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{z} + \vec{\delta})$

(1) حدد معادله المنحى (Γ) في المعلم $(0, \vec{u}, \vec{v})$ واستنتج لميله (Γ)

(2) أسمى المنحى (Γ) في المعلم $(0, \vec{u}, \vec{v})$

الجواب . (1) ليك (x, y) روح لحدثيني نقطه M في المعلم $(0, \vec{u}, \vec{v})$

و (x, y) روح لحدثيني النقطه M في المعلم $(0, \vec{u}, \vec{v})$

$$\vec{OM} = x\vec{u} + y\vec{v} = x\vec{z} + y\vec{\delta} \quad \text{لبناء :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x(\vec{z} + \vec{\delta}) + \frac{\sqrt{2}}{2}y(\vec{z} - \vec{\delta}) = x\vec{z} + y\vec{\delta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\vec{z} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\vec{\delta} = x\vec{z} + y\vec{\delta}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \end{cases}$$

$$m(x, y) \in (r) \Leftrightarrow x^2 + \frac{6}{5}xy + \frac{y^2}{5} - \frac{8}{5} = 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2}(x+y)(x-y) + \frac{1}{2}(x-y)^2 - \frac{8}{5} = 0$$

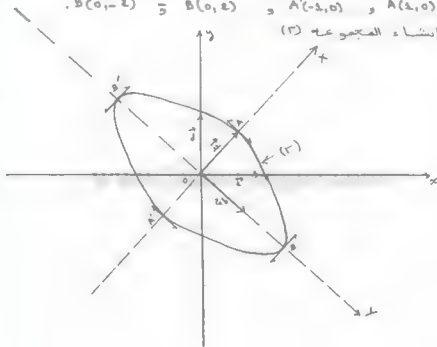
$$\Leftrightarrow 5(x^2 + 2xy + y^2) + 6(x^2 - y^2) + 5(x^2 - 2xy + y^2) - \frac{8}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 4y^2 - 16 = 0$$

$$M(x, y) \in (r) \Leftrightarrow \frac{x^2}{(4)^2} + \frac{y^2}{(2)^2} - 1 = 0$$

ومنه (r) داهليج مركزه $(0, 0)$ ، رؤوسه في المثلث $(0, 2), (0, -2)$ ، $A(2, 0)$ و $A'(-2, 0)$ ، $B(0, 2)$ و $B'(0, -2)$.

(2) إنشاء المجموعة (r)



المستوى (3) منسوب إلى معلم متقاعد منظم $(0, 2, 8)$

لنكن (ع) مجموعة النقط $M(x, y)$ من (3) بحيث :

$$4x|x| + y^2 - 16x - 20 = 0$$

(أ) أجب أن (ع) هي اتحاد جزء معروضي $(ع_1)$ وجزء معروضي $(ع_2)$

ب - حدد كل من $(ع_1)$ و $(ع_2)$ ، طبيعتها ، مركزها ، رؤوسها والمقاربات إذا وجدت .

(2) أ - حدد نقط تقاطع كل من $(ع_1)$ و $(ع_2)$ مع محور الخرتيب

ب - حدد المماسات لكل من $(ع_1)$ و $(ع_2)$ في هذه النقط

(3) انظمي المنحنى (ع) .

الجواب (1) : أ - لنكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى (3)

لدينا : $M(x, y) \in (ع) \Leftrightarrow 4x|x| + y^2 - 16x - 20 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 & x \geq 0 \\ -4x^2 + y^2 + 16x - 20 = 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

نعبر المجموعة $(ع_1)$: $4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0$

$$(ع_1) : \frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$$

وهي $(ع_1)$ إهليج .

نعبر المجموعة $(ع_2)$: $-4x^2 + y^2 + 16x - 20 = 0$

$$(ع_2) : -\frac{(x+2)^2}{3^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$$

وهي $(ع_2)$ هذلول .

والتالي (ع) هي اتحاد جزء من الإهليج $(ع_1)$ وجزء من الهذلول $(ع_2)$

ب - لدينا $(ع_1)$: $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ إهليج مركزه $A_1(2, 0)$

ورؤوسه $A_2(2, 6)$ و $A_3(2, -6)$ و $B_1(5, 0)$ و $B_2(5, 0)$

لدينا $(ع_2)$: $-\frac{(x+2)^2}{3^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ هذلول مركزه $A_4(-2, 0)$

ورؤوسه $B_4(-2, 2)$ و $B_5(-2, -2)$

ومعاد بانه : $(D_2) : y = -2(x+2)$; $(D_1) : y = 2(x+2)$

2) - تقاطع (E_2) مع (yy') :

لدينا : $m(x, y) \in (E_2) \cap (yy') \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2\sqrt{5} \text{ , } y=2\sqrt{5} \end{cases}$

اذ : $(E_2) \cap (yy') = \{I_2(0, -2\sqrt{5}), I_2'(0, 2\sqrt{5})\}$

تقاطع (E_2) مع (yy')

لدينا : $m(x, y) \in (E_2) \cap (yy') \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -\frac{(x+2)^2}{(3)^2} + \frac{y^2}{(2)^2} = 1 \end{cases}$

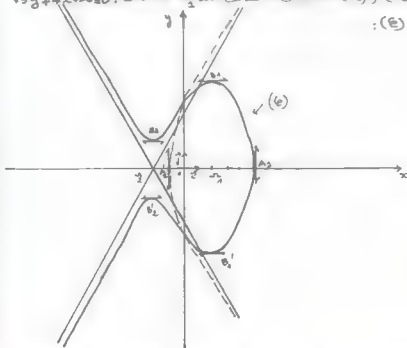
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=20 \end{cases}$

ومنه : $(E_2) \cap (yy') = \{I_2(0, -2\sqrt{5}), I_2'(0, 2\sqrt{5})\}$

ب- المنحنيين (E_2) و (E_1') لهما نفس المماس عند I_1' معادلته : $\sqrt{5}y - 4x - 10 = 0$

المنحنيين (E_2) و (E_1) لهما نفس المماس عند I_2 معادلته : $\sqrt{5}y + 4x + 10 = 0$

(د) انشاد : (ع)



(أ) حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0$ (1)

علماً أن أحد حلولها عدد صحيح طبيعي.

(2) في المستوى العقدي مرسوم Δ لا معلم معاً عدم منظم (ت، أ، 0).

نعبر النقط M_1 و M_2 و M_3 و M صور الأعداد العقدية

1 و $1 + \sqrt{3}i$ و $-1 - \sqrt{3}i$ و -1 على التوالي .

ننك (E) الإهليج الذي مركزه M و الذي يمر من النقطتين M_1 و M_2

ومعوره البؤري هو محور الأفاصل .

أ - حدد البؤريتين و الدليل و الباعد المركزي للإهليج (E).

ب - حدد معادلة ديكارتية للإهليج (E) في المعلم (ت، أ، 0).

ج - حدد إحداثيات نقط تقاطع الإهليج (E) ومحور الخواص .

د - أنس (E) .

الحواب : (1) لنحل 3 المعادلة

$$z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0 \quad (3)$$

نلاحظ أن 1 حل للمعادلة (3) ، إذ $P(z) = z^3 + z^2 + 2z - 4$ نقس

القسمه على $z - 1$ ، بعد انكار القسمه إلى خلد به ل $P(z)$ على $z - 1$

$$P(z) = (z - 1)(z^2 + 2z + 4) \quad \text{نعمل علماً :}$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad z^2 + 2z + 4 = 0 \quad (4)$$

مميز المعادلة (4) هو : $\Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \quad \text{أو} \quad z = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \quad \text{أو} \quad z = -1 - \sqrt{3}i \quad \text{أو} \quad z = -1 + \sqrt{3}i$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $S = \{1, -1 - \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i\}$

(2) أ - لدينا محور البؤري للإهليج (E) هو محور الأفاصل أو (πM_1)

وليس (πM_2) و (πM_3) معاملة M_2 بالنسبة ل M

ومنه $[M_1 M_3]$ هو المحور الحقيقي للإهليج (E)

وليس $\pi M_2 = 2$ و $\pi M_1 = \sqrt{3}$

نكتب F أحد البؤر، بينا للإهليج (E) إذاً: $aF^2 = c^2 = a^2 - b^2$

منه: $aF^2 = aM_1^2 + aM_2^2$ حيث: $a = aM_1$ و $b = \sqrt{3}$

$$a > b$$

$$aF = 1 \quad \text{إذاً:}$$

وبما أن $M(-2, 0)$ على البؤرتين للإهليج (E) فلما: $F(0)$ و $F'(-2, 0)$

ليكن K المسطح العمودي لـ F على أحد الدليلين للإهليج (E) إذاً:

$$aK = \frac{a^2}{c} = 4 \quad (\text{إذاً: } a=2 \text{ و } c=1)$$

ومنه الإهليج (E) يمثل دليلتين معادلتها: $(3): x=3$ و $(3'): x=-3$

الساعد المركزي للإهليج (E) هو: $e = \frac{aF}{aM_1} = \frac{1}{2}$

ب. معادلة الإهليج (E) في المعلم $(0, \sqrt{3}, \frac{1}{2})$ هي:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \text{حيث: } a=2 \text{ و } b=\sqrt{3}$$

ج. نقطتاي الإهليج (E) ومحور الخواص:

تتكون $M(x, y)$ نقطة من المستوى لدينا:

$$M(x, y) \in (E) \cap (y y') \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$$

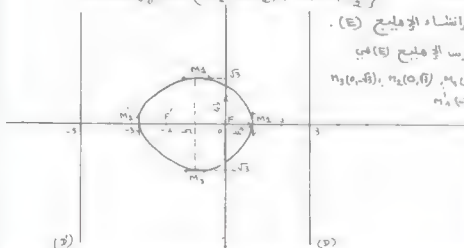
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=0 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(E) \cap (y y') = \{ E_1(0, \frac{3}{2}), E_2(0, -\frac{3}{2}) \} \quad \text{وهي}$$

د. إنشاء الإهليج (E).

رؤوس الإهليج (E) هي:

$$M_1(4, 0), M_2(0, \sqrt{3}), M_3(0, -\sqrt{3}), M_4(-4, 0)$$



في المستوى \mathcal{P} منسوب إلى معلم معامد مماسين $(0, \vec{a}, \vec{b})$

نعتبر النقطتين : $F(2, 0)$ و $F'(-2, 0)$

لتكن (\mathcal{F}) مجموعة النقط M من المستوى \mathcal{P} بحيث : $MF + MF' = 4$

(2) نكتب من أن النقط $A(-2, 0)$ و $B(2, 0)$ و $C(-2, \frac{3}{2})$ و $D(2, \frac{3}{2})$ و $E(2, \frac{3}{2})$ تنتمي إلى (\mathcal{F}) .

(2) أ- حدد طبيعة (\mathcal{F})

ب- حدد معادله وبارنته لـ (\mathcal{F}) في المعلم $(0, \vec{a}, \vec{b})$

(3) أنشئ (\mathcal{F}) والنقط A و B و C و D و E .

(4) لتكن $M_0(x_0, y_0)$ نقطة من المستوى \mathcal{P} ندرس $M_0 \notin (BC)$ و $M_0 \neq M_0$ نسق إلى المعامد لـ (\mathcal{F}) عند النقطة B .

أ- حدد إحداثيات النقط P تقاطع المستقيمتين (DE) و (BM_0)

ب- حدد إحداثيات النقط Q تقاطع المستقيمتين (AE) و (CM_0)

ج- استنتج أن :

$$P \text{ و } Q \text{ لهما نفس الخواص} \Leftrightarrow M_0 \in (\mathcal{F})$$

الجواب : (2) لدينا $MF + MF' = 4 \Leftrightarrow M \in (\mathcal{F})$

بحيث : $F(2, 0)$ و $F'(-2, 0)$

إذن محور الإصاويل هو محور تماثل المجموعة (\mathcal{F}) و O أصل هوكل ذلك مركز تماثل المجموعة (\mathcal{F}) .

لدينا : $AF = 3$ و $AF' = 1$ إذن : $MF + MF' = 4$

ومنه : $A \in (\mathcal{F})$

وبما أن B هي مائله A بالنسبة لـ O فإن $B \in (\mathcal{F})$

لدينا : $CF = \frac{5}{2}$ و $CF' = \frac{3}{2}$ إذن : $CF + CF' = 4$

ومنه : $C \in (\mathcal{F})$

وبما أن D هي مائله C بالنسبة لمحور الإصاويل فإن $D \in (\mathcal{F})$

وبما أن E هي مائله D بالنسبة لأصل المعلم O فإن $E \in (\mathcal{F})$

وبالتالي النقط A و B و C و D و E تنتمي إلى (\mathcal{F}) .

(2) -9- طبيعة (2).

$$M \in (2) \Leftrightarrow MF + MF' = 4$$

لدينا

بما أن $FF' = 2 < 4$ فإن (2) إهليج. بترتيب F' و F .

بما أن O مركز الإهليج فإن معادلة الإهليج (2) تكتب على الشكل:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{حيث: } a > 0 \text{ و } b > 0.$$

هذا الإهليج (2) يقطع محور الأفقي و النقيصين زوج واحد منهما:

$$(a, 0) \text{ و } (-a, 0).$$

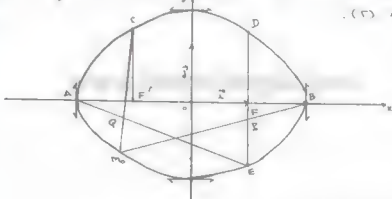
و مما أن $A(-2, 0) \in (2)$ و $B(2, 0) \in (2)$ فإن: $a = 2$.

$$\frac{1}{4} + \frac{9}{4b^2} = 1 \quad \text{بما أن: } C(-1, \frac{3}{2}) \in (2) \text{ فإن:}$$

$$b^2 = 3 \text{ و } b = \sqrt{3}.$$

$$\text{وبالتالي معادلة (2) في المعلم هي: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(3) إسماء (2).



معادلة المستقيم (DE) هي: $x = 1$

معادلة المسقيم (BM₀) هي: $y(x_0 - 2) - y_0(x - 2) = 0$

$$P(x, y) \in (DE) \cap (BM_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y(x_0 - 2) - y_0(x - 2) = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{y_0}{2 - x_0} \end{cases}$$

ومنه: $P(1; \frac{y_0}{2 - x_0})$ (نلاحظ أن $2 - x_0 \neq 0$ لأن M_0 لا تنتمي إلى المحاور لـ (2) عند B)

معادلة المستقيم (AE) هي: $x + 2y + 2 = 0$

$$\text{معادلة المستقيم (CM)} \text{ هي: } (x+1)(y_0 - \frac{3}{2}) - (x_0 + 1)(y - \frac{3}{2}) = 0$$

$$Q(x, y) \in (AE) \cap (CM_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+2=0 \\ (x+1)(y_0-\frac{3}{2}) - (x_0+1)(y-\frac{3}{2})=0 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-2 \\ (\frac{3}{2}-y_0)x + (x_0+1)y = \frac{3}{2}x_0 + y_0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{3}{2}-y_0 & x_0+1 \end{vmatrix} = x_0+2y_0-2 \quad \text{لدينا من هذه النظم:}$$

$$\text{بما أن } M_0 \notin (BC) \text{ فإن: } x_0+2y_0-2 \neq 0 \quad \text{فيكون: } \begin{cases} x_0+2y_0-2 \neq 0 \\ x+2y-2=0 \end{cases} \quad \text{معادلة (BC) هي:}$$

منه النظمة تقبل حل وجيد

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{3x_0-2y_0+6}{2(x_0+2y_0-2)} \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{5x_0+2y_0+2}{x_0+2y_0-2}$$

$$Q\left(\frac{5x_0+2y_0+2}{x_0+2y_0-2}, \frac{3x_0-2y_0+6}{2(x_0+2y_0-2)}\right) \quad \text{منه:}$$

$$(P \text{ و } Q \text{ لهما نفس الأتوب}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-2 \neq 0 \\ x_0+2y_0-2 \neq 0 \\ \frac{y_0}{2-x_0} = \frac{3x_0-2y_0+6}{2(x_0+2y_0-2)} \end{cases} \quad \text{ج - لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-2 \neq 0 \\ x_0+2y_0-2 \neq 0 \\ \frac{y_0}{2-x_0} = \frac{3x_0-2y_0+6}{2(x_0+2y_0-2)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-2 \neq 0 \\ x_0+2y_0-2 \neq 0 \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1 \end{cases}$$

$$(P \text{ و } Q \text{ لهما نفس الأتوب}) \Leftrightarrow M_0 \in (\Gamma - \{B, C\}) \quad \text{وبالتالي:}$$

13

3 المسوى \mathcal{P} المرسوم بالخط معلوم معامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j})

$$\text{نفس القطر } M_0(x, y) \text{ بحيث } \begin{cases} x = \frac{\cos \theta}{2 + \cos \theta} \\ y = \frac{\sin \theta}{2 + \cos \theta} \end{cases} \quad \text{مع } \theta \in [0, 2\pi[$$

(أ) 1- أحسب بدلالة θ المسافة OM_0

ب- أحسب بدلالة θ مسافة القطر M_0 عن المصمم (الذي معادلته $x=1$)

(ج) سم أن كل θ من $[0, 2\pi[$ ، القطر M_0 سيعبر (أو لا سيعبر) (E) سم حدد

تباعد المركز O ومجموعة المماس.

(د) أوجد إحداثيات رؤوس المثلث (E) وإحداثيات نقطه نقاط (E) ومركزه (E) ب- أنشئ المثلث (E)

الجواب (2) -1 لـ $OM^2 = x^2 + y^2 = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{(2 + \cos \theta)^2} = \frac{1}{(2 + \cos \theta)^2}$

بما أن $\cos \theta \geq -1$ فإن $2 + \cos \theta > 0$

ومن هنا $OM = \frac{1}{2 + \cos \theta}$

ب- لدينا $d(M, D) = |x - 1| = \left| \frac{-1}{2 + \cos \theta} \right| = \frac{1}{2 + \cos \theta}$

لأن $2 + \cos \theta > 0$

(2) لدينا لكل θ من $[0, 2\pi[$ $\frac{OM}{d(M, D)} = \frac{1}{2} < 1$

ومنه M_0 تسمى الرأس الإهليج (E) الذي يؤثر O، ودليله (D) وساعة المركزى $e = \frac{1}{2}$ ومحور السوي لـ (E) عمودي على (D) والمار من O أي المحور (O, \vec{x}) .

(3) إحدئيات رؤوس الإهليج (E) يكون $M(x, 0)$ رأس لـ (E).

لدينا $M(x, 0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{OM}{d(M, D)} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{|x|}{|x-1|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|x| = |x-1|$

$\Leftrightarrow 2x = x-1 \text{ أو } 2x = -x+1$

$\Leftrightarrow x = -1 \text{ أو } x = \frac{1}{3}$

ومنه: $A(\frac{1}{3}, 0)$ و $A'(-1, 0)$ رأسين للإهليج (E).

لكن π مركز الإهليج (E) إذن π منتصف القطعة $[AA']$

أي: $\pi(-\frac{2}{3}, 0)$

المحور الكبر لحلوه $a = \frac{2}{3}$ أي $2a = AA' = \frac{4}{3}$

لدينا $b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنه $c = ea = \sqrt{a^2 - b^2}$

ومنه $B(-\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ و $B'(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ الرأسين الآخرين لـ (E)

وبالتالي رؤوس الإهليج (E) هي:

$A(\frac{1}{3}, 0)$ و $A'(-1, 0)$ و $B(-\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ و $B'(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

إحداثيات بؤبؤ نعالج الإهليج (E) ومحور الأساس

معادلة الإهليج (E) في المعلم $(0, \frac{2}{3})$ هي :

$$\frac{(x - \frac{2}{3})^2}{(\frac{2}{3})^2} + \frac{y^2}{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2} = 1$$

$$3(x + \frac{2}{3})^2 + 12y^2 = 4$$

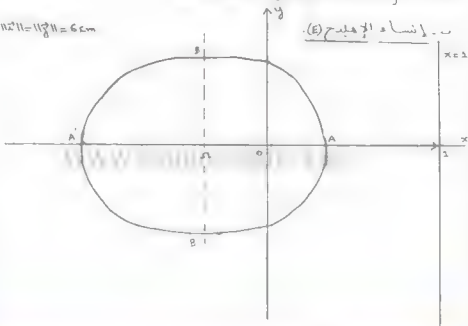
أي :

$$M(x, y) \in (E) \cap (0, \frac{2}{3}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3(x + \frac{2}{3})^2 + 12y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(E) \cap (y, y') = \{E(0, \frac{1}{2}), E'(0, -\frac{1}{2})\} \text{ ومنه :}$$

$$\|A' - B'\| = \|A - B\| = 6 \text{ cm}$$



(D)

المسوى P مسو. إلى معلم معام مستقيم $(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

14

سد مسابا المجموعة (E) للمعلم $M(x, y)$ إلى جهة المعلم

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y \leq 0 \\ x^2 - 2x - y^2 \geq 0 \end{cases}$$

العوأب :

نمكن (أو) نقطة من المستوى S .

لذا $M(x,y) \in (E) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y \leq 0 \\ x^2 - 2x - y^2 \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 - 4 \leq 0 \\ (x-1)^2 - y^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

بحسب الدائرة (C) التي معادلتها $(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 4$ مركزها $(1, \sqrt{3})$ و شعاعها $R=2$

إذا مجموعة النقط $M(x,y)$ حسب $(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 - 4 \leq 0$ هي مجموعة M الموجودة داخل الدائرة (E) .

بحسب القطر (H) الذي معادلتها $(x-1)^2 - y^2 = 1$ الذي مركزه $(1,0)$

ومقارباته $(D_1): y = x-1$ و $(D_2): y = -x+1$

و رؤوسه $A'(0,0)$ و $A(2,0)$

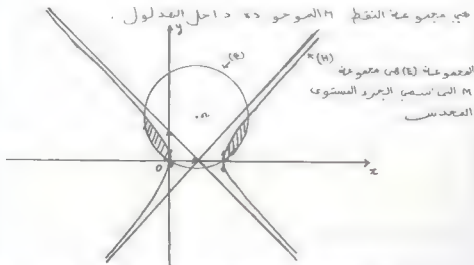
مجموعة النقط $M(x,y)$ من H حسب $(x-1)^2 - y^2 - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq x^2 - 2x \Leftrightarrow |y| \leq \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \sqrt{x^2 - 2x} \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} y \geq -\sqrt{x^2 - 2x} \\ y \leq 0 \end{cases}$$

ومنه مجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث $x^2 - 2x - y^2 \geq 0$

هي مجموعة النقط M الموجودة داخل القطر (H) .



15

المسئول 3 مشروب إلى معلم متعامد منظم $(0, 2, 3)$

نحسز الإهليج (E) الذي معور الكيس 2 و يوربا 1 $F(-c, 0)$ و $F(c, 0)$ لكن م نقطة من الإهليج (E) أقصولها x و يقياس الزاوية $(\widehat{MF}, \widehat{MF'})$

$$\cos \alpha = \frac{c^2 x^2 - 2c^2 a^2 + a^4}{a^4 - c^2 x^2} \quad (1) \text{ بت أن .}$$

(2) باستعمال النتيجة السابقة أدرس نقاط الإهليج (E) والاشرة (E) التي أحد أقطارها $[FF']$: الوعود - أقصول نقط التقاطع .

في حالة الدائرة (E) مماسة لـ (E) : حدد الناعد المركب لـ (E)

الجواب (1) معادلة الإهليج (E) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$

وبما أن $c^2 = a^2 - b^2$ أي $b^2 = a^2 - c^2$ فيأب $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ ومنه :

$$y^2 = (a^2 - c^2) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

$$y^2 = a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

لكن $M(x, y)$ من (E) $F(-c, 0)$ و $F(c, 0)$ إذن :

$$\vec{MF} = (-c-x, -y) \quad \vec{MF'} = (c-x, -y)$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{MF} \cdot \vec{MF'}}{\|\vec{MF}\| \|\vec{MF'}\|}$$

لدينا :

$$= \frac{(c-x)(-c-x) + y^2}{\sqrt{(c-x)^2 + y^2} \sqrt{(c+x)^2 + y^2}}$$

$$= \frac{-c^2 + x^2 + a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2}}{\sqrt{c^2 + x^2 - 2cx - c^2 - x^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2}} \sqrt{c^2 + x^2 + 2cx - c^2 - x^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2}}}$$

$$= \frac{\frac{c^2 x^2 - 2c^2 a^2 + a^4}{a^2}}{\sqrt{(a - \frac{cx}{a})^2} \sqrt{(a + \frac{cx}{a})^2}}$$

$$= \frac{c^2 x^2 - 2c^2 a^2 + a^4}{|(a^2 - cx)(a^2 + cx)|} = \frac{c^2 x^2 - 2c^2 a^2 + a^4}{|a^4 - c^2 x^2|}$$

$$\cos \alpha = \frac{c^2 x^2 - 2c^2 a^2 + a^4}{a^4 - c^2 x^2} \quad (c \leq a, |x| \leq a \quad \text{لأن } c^2 x^2 \leq a^4 ;)$$

(2) لدينا (ع) الدائرة التي قعرها $[FF']$ و $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'}) \equiv \alpha \quad [2\pi]$

$$M \in (E) \iff \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MF'} = 0$$
$$\Leftrightarrow \overline{(\vec{mF}, \vec{mF}')} = \frac{\pi}{2} \quad [28] \quad , \quad \overline{(\vec{mF}, \vec{mF}')} = -\frac{\pi}{2} \quad [29]$$
$$\Leftrightarrow \cos \alpha = 0$$
$$M \in (E) \cap (E) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{cx^2 - 2c^2x^4 + \alpha^4}{\alpha^4 - c^2x^2} \\ \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$
$$\Leftrightarrow c^2 x^2 - 2c^2 \Delta^2 + a^4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2c^2a^2 - a^4}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} (2c^2 - a^2)$$

ليكن e التباعد المركز للإهليج (E) : $e = \frac{c}{a}$

$$e < \frac{1}{\sqrt{2}} : c^2 - a^2 < 0 : \text{楕圓}$$

فأما $E \cap E = \emptyset$.

$$e > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \frac{c}{a} > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore c^2 - a^2 > 0 \quad \therefore b^2 > 0$$

خانات (٤) تقبل أربع نقطه أخا صلا $x_2 = -\frac{a}{c} \sqrt{2c^2 - a^2}$ و $x_1 = \frac{a}{c} \sqrt{2c^2 - a^2}$

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore 2c^2 - a^2 = 0 \quad \therefore 6b^2 = a^2$$

فإن $\epsilon \in \mathbb{N}$ يقبل تقديرات أحصاؤها $x = 0$.

منه (ع) حماسة للإصلاح (ع).

لیک (P) متلجم مؤلفه F و د لیل (D)

16

نذكر (5) مستقيم صغير ما، من F قطع الشلجم (P) في M و M'

بما أن الدائرة التي مركزها (MM') حاصلة المستقيم (D).

الاجواب : ليكن مفتوح $[m, n]$ (2) | (D)

لتكن H و H' و σ المساقم العمودية

النقطة m و m' و ∞ على التوالي

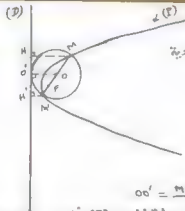
عبد المظفر (2).

معاً في ٥ ختصوف [mm']

زمان: ۵۰ دقیقه [۱۱۱']

$$O_0' = \frac{m_H + m_H'}{2} \quad \therefore \text{C.O.G.}$$

بما أن M و M' تتجهيان إلى الضلع (Σ) فإن $MF = MH$ ، و $M'F = M'H'$



$$OO' = \frac{MM'}{2}$$

أي :

$$OO' = \frac{MF + M'F}{2}$$

ومنه :

$$OO' = OM = OM' = R \quad \text{ومنه : (ع) شعاع الدائرة (ع)}$$

$$d(O, \mathcal{D}) = R \quad \text{إذن :}$$

وبالتالي (د) مماس للدائرة (ع) .

17

المستوى \mathcal{P} منسوب إلى معلم متعامد معهم (O, \vec{x}, \vec{y})

يجب : $\| \vec{u} \| = 2\text{cm}$ بحسب الشلجم (E) الذي يوترته O ، دليله (د)

معادلته : $x = 1$.

(أ) أكتب معادلة الشلجم (E) ، أنشئ (E) .

(B) تكون النقطة من (E) ، H المقطع العمودي $\perp M$ على (د) ، I منتهى

القطعة $[OH]$ ، A النقطة ذات اللصف 1 ، B النقطة ذات اللصف 2

$$(\vec{MI}, \vec{MH}) \equiv (\vec{HO}, \vec{HA}) \quad [\pi] \quad \text{من أن .}$$

$$(\vec{MO}, \vec{MH}) \equiv (\vec{OH}, \vec{HB}) \quad [2\pi] \quad \text{استنتج أن .}$$

$$(\vec{MO}, \vec{MH}) \equiv 0 \quad [2\pi] \quad \text{بعب .} \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

ليكن z و h تعين النقطتين M و H على التوالي

$$\text{بين أن :} \quad \frac{z-h}{z} = \frac{h-z}{h} = e^{i\theta} \quad \text{و أن :} \quad \theta \neq 0$$

$$\text{واستنتج أن :} \quad z = \frac{e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2}$$

الاجواب : (أ) لدينا (E) الشلجم الذي يوترته O ، دليله $x=1$ (د)

$$M(x, y) \in (E) \Leftrightarrow d(M, \mathcal{D}) = MO$$

إذن :

$$\Leftrightarrow MH = MO$$

(H(1, 0) المقطع العمودي $\perp M$ على (د))

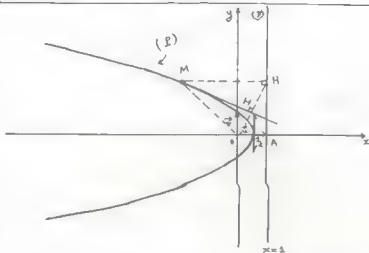
$$\Leftrightarrow MH^2 = MO^2$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = -2x + 1$$

ومنه معادلة الشلجم (E) هي : $y^2 = -2x + 1$.

إنشاء الشلجم (E) :



$$(\overrightarrow{HM}; \overrightarrow{HA}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [7]$$

$$(v) \dots (\overline{HM}, \overline{H\hat{O}}) = \frac{\pi}{2} - (\overline{H\hat{O}}, \overline{H\hat{B}}) \quad \text{--- [4]} \quad \text{--- [4]}$$

3 م، منه (Im) متوسط ومنصف الداخلي المار من م في العتلت OHM

إذن المثلث ImH قائم الزاوية في I

$$(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{HI}) = (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MH}) + (\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{HI}) = \frac{\pi}{2} \quad [n] \quad \text{او نه لایینا}$$

$$(\overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{HI}) \equiv (\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{MI}) \quad [2\pi] \quad \text{لدينا،}$$

إذن ١- ح (٤) و (٥) نستنتج أن :

$$(\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_2}) = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{m_0}, \overrightarrow{m_A})) \quad [11]$$

$$(\overline{MI}; \overline{MH}) \equiv (\overline{HO}, \overline{HA}) \quad [P] \quad \therefore \text{die}$$

$$2(\overrightarrow{mI}, \overrightarrow{mH}) \equiv 2(\overrightarrow{H0}, \overrightarrow{HA}) \pmod{2\pi}$$

بما أن الفئليث omH و oHB منسايين السافين في M و H على التوالي

فإن (MI) و (HA) منسحق داخلياً للمنتج OH و OHB على التوالي

الماريت حن م . H .

$$(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MH}) = (\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HB}) \quad [2\pi] \quad \text{ومن هنا نستنتج أن:}$$

$$\theta \in [0, 2\pi[\quad \text{حيث:} \quad (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MH}) \equiv \theta \quad [2\pi] \quad \text{لدينا:}$$

$$\begin{cases} MO = MH \\ (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MH}) \equiv \theta \quad [2\pi] \end{cases} \quad \text{لأنه لدينا:}$$

ومن هنا H هي صورة O بالدوران Z الذي مركزه M وزاويته θ

$$Z(O) = H \Leftrightarrow Z - R = e^{i\theta}(Z - O) \Leftrightarrow Z - R = e^{i\theta}Z \quad \text{إذن}$$

$$(3) \quad \frac{Z - R}{Z} = e^{i\theta} \quad \text{ومن هنا:}$$

$$\begin{cases} HO = HB \\ (\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HB}) \equiv \theta \quad [2\pi] \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} HO = HB \\ (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MH}) \equiv (\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HB}) \quad [2\pi] \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

ومن هنا B هي صورة O بالدوران Z' الذي مركزه H وزاويته θ

$$Z'(O) = B' \Leftrightarrow H - Z = e^{i\theta}(H - O) \Leftrightarrow H - Z = e^{i\theta}H \quad \text{إذن}$$

$$(4) \quad \frac{H - Z}{H} = e^{i\theta} \quad \text{ومن هنا:}$$

$$\text{من (3) و (4) نستنتج أن:} \quad \frac{Z - R}{Z} = \frac{H - Z}{H} = e^{i\theta} \quad \text{لأنه:} \quad \frac{Z - R}{Z} = \frac{H - Z}{H} = e^{i\theta}$$

نفتراض أن $\theta = 0$ إذن:

$$\frac{Z - R}{Z} = 1 \quad \text{أي:}$$

$$H(R) \in (D) \quad \text{لأن } O \text{ لا ينتمي لـ } (D) \quad \text{و} \quad \theta \neq 0$$

ومن هنا:

$$H = \frac{Z}{1 - e^{i\theta}} \quad \text{إذن} \quad \frac{H - Z}{H} = e^{i\theta} \quad \text{لدينا:}$$

$$Z = \frac{R}{1 - e^{i\theta}} \quad \text{إذن} \quad \frac{Z - R}{Z} = e^{i\theta} \quad \text{لدينا:}$$

$$Z = \frac{R}{(1 - e^{i\theta})^2} \quad \text{وبالتالي:}$$

18 في المستوى \mathcal{P} نعتبر مثلثاً AFB قائم الزاوية في A ، ولنك

θ قياس الزاوية \widehat{B} بالدوران بحيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

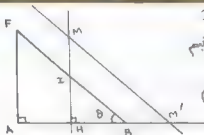
لنك M نقطة من المستوى \mathcal{P} نبدأ من M المشيغب الموار بب لكل من (AF) و (FB) ونصلها بالمشيغب (AB) في H و M' على التوالي

لتك (3) مجموعها القطر M من \mathcal{P} بحيث: $MM' = MF$

$$(2) \text{ من أن } M \in (r) \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = \frac{1}{\sin \theta}$$

واشنع أن (r) معروفي محدد طبيعته.

(2) في هذا السؤال نأخذ $AF = 6 \text{ cm}$ ، مثل دؤوس و يوربا ، مركز المخروطي
(3) ، ثم أنتخه (2) .



الجواب : (1) ليكن M نقطة من D
نقطه تقاطع المستقيم (AB) والمستقيم
المرافق M والموازي لـ (AF)
 M' نقطة تقاطع المستقيم (AB) والمستقيم
المرافق M والموازي لـ (BF) .

$$ME(\gamma) \Leftrightarrow MM' = MF \quad \text{لدينا ،}$$

ليكن I نقطة تقاطع المستقيم (MH) ، المستقيم (FB)
لدينا المثلث MHM' قائم الزاوية في H و $(MM') \parallel (FB)$
ومنه حسب مبرهنة ثاليس لدينا :

$$\frac{MM'}{MH} = \frac{IH}{IB} \quad \text{وبما أن} \quad \sin \theta = \frac{IB}{IH} \quad \text{فإن} \quad \frac{MM'}{MH} = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{أي} \quad MH' = \frac{1}{\sin \theta} \cdot MH$$

$$ME(\gamma) \Leftrightarrow MM' = MF \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin \theta} MH = MF$$

$$ME(\gamma) \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} > 1 \quad \text{بما أن : } \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad \text{فإن} \quad \sin \theta < 1 \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{وبالتالي (2) مدلول لأن} \quad \frac{MF}{d(M, (AB))} = e > 1 \quad ME(\gamma) \Leftrightarrow$$

$$(2) \text{ نأخذ : } AF \quad \text{و} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{رأى ،}$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \right) \quad ME(\gamma) \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = 2$$

$$\frac{AF}{BF} = \sin \frac{\pi}{6} \quad \text{معاد ،} \quad AFB \text{ مثل قائم الزاوية في } A \quad \text{فإن}$$

$$\text{إذن : } FB = 2AF = 12$$

(3) مدلول يقبل بقوة F ودليل (AB) .

$$\text{ليكن } S \text{ رأس المدلول إذن} \quad SE[AF] \quad \text{و} \quad \frac{SF}{SA} = 2$$

$$SA = \frac{AF - AS}{2}$$

أي :

$$SA = \frac{SF}{2}$$

إذن :

$$SA = 2.$$

أي :

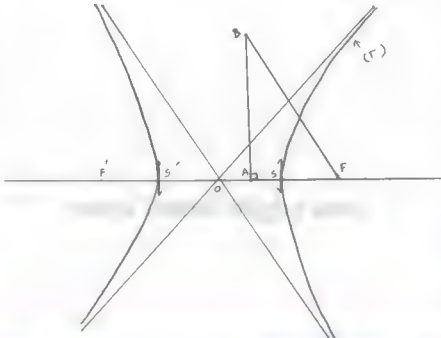
$$SA = \frac{AF}{3}$$

ومنه :

ليكن O مركز المذلول (Γ) لدينا . $\frac{OF}{OS} = e = 2$ أي : $OF = 2OS$

ومنه S منصف $[OF]$ أي O مماثلية F بالنسبة لـ S

الرأس الثاني S' و الصورة الثانية F' هما مماثلتا S و F بالنسبة لـ O على التوالي .



ليكن (D) مستقيماً و F نقطة من المستوى بحيث $d(F, O) = 5$

19

ليكن (Δ) المستقيم المار بـ F والعمودي على (D)

ليكن θ عدد حقيقي بحيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

2) ليكن (Γ_θ) مجموعة النقط M من المستوى بحيث $\frac{MF}{MH} = \cos \theta$

حيث H المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (D)

حدد حسب قيم θ طبيعة (Γ_θ)

3) أنسئ Γ_0 في حالة $\theta = 0$

3) أ- ليكن $\theta = \frac{\pi}{3}$. حدد الرؤوس A و A' لـ $(\Gamma_{\frac{\pi}{3}})$ الموحدوس على (Δ)

المركز O و البؤرة الشاسعة F' لـ (Γ_3) . انشئ (Γ_3) .
 ب- حدد معادله ديكارتية لـ (Γ_3) في معلم معامد منظم (O, \vec{x}, \vec{y}) .
 جـ O مركز (Γ_3) و \vec{x} محفه واحده على المنقيم (Δ) .

الجاب (1) لنك M نقطه مـ المسوى و H المسقط العمودي لـ M على (Δ)

$$M \in (\Gamma_3) \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = \epsilon \cos \theta$$

لدينا .

منه (Γ_3) معروفه بؤرتـ F و دليلـ (Δ) و بساعده المركزي $\epsilon = \cos \theta$

بما أن : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فإن : $0 < \epsilon = \cos \theta < 1$

إذا كانـ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ بـ $0 < \epsilon < 1$ منه (Γ_3) إهليج .

إذا كانت $\theta = 0$ فإن : $\epsilon = 1$ منه (Γ_3) شلجم .

(2) لنك M المسقط العمودي للنقطـ F على (Δ) و لنك S نقطـ

القطـ $[MF]$ ، إذن القطـ S سمي إلى (Γ_3) و (MF) محور سائل

المنلجم (Γ_3) .

بحسـ المعلم المعامد المنظم (S, \vec{x}, \vec{y}) بحيث $\vec{x}F = 3\vec{x}S$

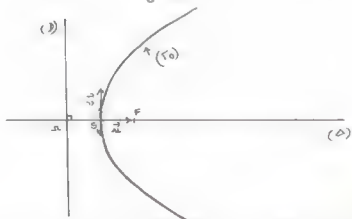
في هـ المعلم لدينا : $F(-\frac{3}{2}, 0)$ و $S(\frac{3}{2}, 0)$

لدينا : $M(x, y) \in (\Gamma_3) \Leftrightarrow MF = MH$

$$\Leftrightarrow |x + \frac{3}{2}| = \sqrt{(x - \frac{3}{2})^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{3}{2})^2 = (x - \frac{3}{2})^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 6x$$



$$(3) \text{ فـ إذا كان } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ فإن } M \in (\sqrt{3}) \Leftrightarrow \frac{MF}{MN} = \frac{1}{2}$$

ومنه $(\sqrt{3})$ لأهليج نساعد المركز $e = \frac{1}{2}$
 لتكن A' و A رؤوس $(\sqrt{3})$ على المستقيم (Δ) ، نعلم ان نفس المسطر العمودي Δ على (3) بحيث :

$$\frac{MF}{MA} = \frac{1}{2}$$

$$\text{إذن } MA = 2MF \quad \text{أي } MA^2 = 4MF^2$$

$$\Leftrightarrow (\vec{MA} - 2\vec{MF}) \cdot (\vec{MA} + 2\vec{MF}) = 0$$

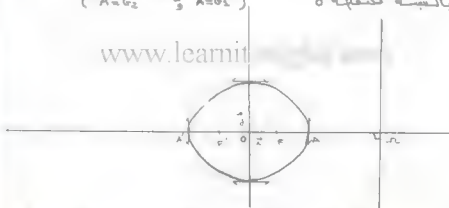
بكن G_1 مرجع النظم المزدوج $\{(1,1), (F,-2)\}$

G_2 مرجع النظم المتراف $\{(G_1,1), (F,2)\}$

$$\vec{MG}_1 \cdot \vec{MG}_2 = 0 \quad \text{ومنه}$$

(د ب م) يسمى إلى الدائرة التي قطرها $[G_1G_2]$ ، ومنه رؤوس $(\sqrt{3})$
 مما G_1 و G_2 ومركزه O منتصف $[G_1G_2]$ ، ومركزه الثانيه F' هي معادله F بالنسبة للنقطة O
 $(A'=G_2 \quad \text{و} \quad A=G_1)$

www.learnit



$$\text{بـ معادله دكارسة } (\sqrt{3}) \text{ و المعلم } (0,2,\vec{j}) \text{ هي } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{حسب } a = \frac{dc}{1-e^2} = 2 \quad \text{و} \quad b = \frac{dc}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{3} \quad \text{مع } e = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad d=3$$

$$\text{ومنه : } (\sqrt{3}) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

20

المستوى \mathcal{P} منسوب إلى معلم متعامد مصظم $(0, \vec{e}, \vec{f})$ نعتبر النقطتين $F(1, 6)$ و $F'(1, -2)$.(1) حدد المجموعة (E) للنقطة M من المستوى \mathcal{P} بحيث

$$MF + MF' = 10$$

(2) حدد معادلة ديكارتية لـ (E) الجواب : (1) لدينا : $ME(E) \Leftrightarrow MF + MF' = 10$ بحيث : $F(1, 6)$ و $F'(1, -2)$ بما أن : $FF' = 8 < 2b = 10$ (أي : $b = 5$)بما : (E) إهليلج رؤسا F و F' ومركزه $(1, 2)$ - متجه $[FF']$ ومعوقه النودي (FF') موار لتجوار الرأس (أي $FF' = -8\vec{j}$)(2) معادلة ديكارتية لـ (E) مكتب على شكل $1 = \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2}$ حيث : $b > 0$ و $b = 5$ و نعلم أن $2c = FF' = 8$ إذن $c = 4$ ولذا $a^2 = b^2 - c^2 = 9$ أي $a = 3$ والناتج المعادلة المختصرة للإهليلج (E) والمعلم $(0, \vec{e}, \vec{f})$ هي :

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

21

المستوى \mathcal{P} منسوب إلى معلم متعامد مصظم $(0, \vec{e}, \vec{f})$.نعتبر النقطتين : $F(-1, 1+\sqrt{2})$ و $F'(-1, 1-\sqrt{2})$ (1) حدد المجموعة (E) للنقطة M من المستوى \mathcal{P} بحيث

$$|MF - MF'| = 2$$

(2) حدد معادلة ديكارتية لـ (E) .الجواب : (1) لدينا : $ME(E) \Leftrightarrow |MF - MF'| = 2$ بحيث : $F(-1, 1+\sqrt{2})$ و $F'(-1, 1-\sqrt{2})$ بما أن : $2b = 2 < FF' = 2\sqrt{2}$ (أي : $b = 1$)

حيث: $a > 0$ و $b = 1$
 نعلم أن $c = FF' = 2\sqrt{2}$ أي $c = \sqrt{2}$
 ولدينا: $a^2 = c^2 - b^2 = 1$ أي $a = 1$

والنتائج المعادلة المحتصرة للعدول (2) في المعلم $(0, \pi, \frac{\pi}{2})$ هي:

$$-(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$$



ديما ديما لعبار ماشي هو

تمارين للبحث

1. لتكن (F) مجموعة مخروطيات التي معادلتها :

$$\frac{x^2}{m-2} + \frac{y^2}{m-3} = 1$$

و m بارامتر حقيقي .

(a) أدرس حسب قيم m ، طبيعة مخروطيات (F) .
حدد الرؤوس والمقاريبات إذا وجدت .

(b) س أن المعطى $M_0(\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$ تنتمي إلى إهليج (E) و هذلول (H₀) من (F) . سم حدد معادلة H₀ و معادلة (E) و أحس أطوال محوري الإهليج (E) .

المسوى 3 منسوب إلى معلم معامد مصظم $(0, \vec{u}, \vec{v})$

(a) لتكن (F) مجموعة النقاط M(x,y) من 3 بحيث :

$$16x^4 + 81y^4 + 72x^2y^2 - 1296y^2 = 0$$

بين أن (F) هو اتحاد مخروطين (F₁) و (F₂) .

(b) أ- حدد مركز و رؤوس كل من (F₁) و (F₂) .

ب- أنشئ (F) .

المسوى 3 منسوب إلى معلم معامد مصظم $(0, \vec{u}, \vec{v})$

(a) حدد البرمجة المعادلة للخط $\Omega(z)$ بحسب

$$10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4$$

حدد رؤوسه F' و F و دليليه .

(b) لتكن γ مركز النحائي h الذي مركزه 0 و نصفه 2 والدوران 2 الذي مركزه 0 وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

حدد معادلة (E') صورة (E) بالتطيت γ .

(c) س أن (E) إهليج رؤوسه $\gamma(F)$ و $\gamma(F')$.

قارن التباعد بين المركزين لـ (E) و (E') .

(d) أنشئ (E) و (E') في نفس المعلم

4

المستوى \mathcal{P} منسوب إلى معلم متعاود منظم $(0, \mathbb{R}, \mathcal{P})$
 نفس السلجم (E) الذي معادلته: $y = x^2$ ، المعنى (E) الذي معادلته:
 $16x^2 + 24y - 16x^2 + 4 = 0$.

(أ) - اعلّم لإدائيتي \mathcal{F} نورة: (E)

ب - حدد طبيعة (E) ونصف من أن \mathcal{F} نورة له

ج - أنشئ (E) و (E) في نفس المعلم.

(د) لتكن $M(a, b)$ نقطة من المستوى بحيث: $a > 0$.

أ - من أنه يمر من M مناسب للسلجم (E) في نقطتين N_1 و N_2
 وحدد أخصول كل منهما.

ب - بين أنه إذا كان المنقيمان (FN_1) و (FN_2) متعامدين فإن

M تنتمي إلى (E)

5

المستوى \mathcal{P} منسوب إلى معلم متعاود منظم $(0, \mathbb{R}, \mathcal{P})$
 \mathcal{F}_1 و \mathcal{F}_2 نقطتان من \mathcal{P} . (E) الإهليج المعروف.

$$ME(E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a, \quad a \in \mathbb{R}_+^*$$

(أ) - بين أن كل تقاييس في \mathcal{P} يحول (E) إلى إهليج (E')

(د) أثبت وجود دوران σ وحيد σ يحالف السليفيط المثلث في \mathcal{P} وشرك (E)
 صامد إجمالياً.

(د) - 1. ليكن S تماثل متعاوداً معورة (E).

بين أن S يترك (E) صامداً إجمالياً إذا وعلّم إذا كان (E) هو المصمم $(F_1 F_2)$
 أو هو واسط القطعة $[F_1 F_2]$.

ب - ليكن σ دارة محورها σ غير معدومة و S تماثل متعاوداً
 معورة (E).

ما هو الشرط اللازم والكافي على σ و (E) لكي يكون الإهليج (E) صامداً
 إجمالياً بالتقاييس $S \circ \sigma$.

(د) - حدد التقاييس التي تترك (E) صامداً إجمالياً

6

المستوى P مسوون إلى معلم متعامد معهم $(0, 2, 3)$

ليكن (E_m) المحسى الذي معادلته: $y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(m+1)$ حيث $m \in \mathbb{R}$

(1) بين أن جميع المنحنيات (E_m) تمر بنقطة ثابتة A

(2) تأكد حسب قيم m طبيعة المحسى (E_m) .

(3) أنشئ: (E_1) و (E_{-1}) .

7

في المستوى الإقليدي المسوون إلى معلم متعامد معهم $(0, 2, 3)$

نعبر (E_m) مجموعة النقط $m(x, y)$ التي تحقق المعادلة:

$$m \in \mathbb{R}^+ : \text{حيث} \quad m(x^2 + y^2) = (2x - \sqrt{m})^2$$

(1) ابتداء من المعادلة (E) هندسياً. أثبت أن (E_m) مخروطي (احدى بؤرتي

النقطة O ، والمضيق (D_m) ذو المعادلة: $x = \frac{\sqrt{m}}{2}$ دليله المرتبط

بالنقطة O .

(2) حدد حسب قيم العدد m طبيعة المحروطي (E_m) .

(3) نأخذ $m=9$.

أ- حدد في المعلم $(0, 2, 3)$ بؤرتي D دليلي ورؤوس المحروطي (E_9)

ب- أنشئ المحروطي (E_9) في المعلم $(0, 2, 3)$.

8

نعبر المحروطي (F_m) المعرف بمعادلته الديكارسية:

$$mx^2 + (2m-3)y^2 + (m-1)x - m = 0$$

في معلم متعامد معهم $(0, 2, 3)$ m سار من حقيقي يخالف 0 ، يخالف $\frac{7}{2}$

(1) أ- حدد مجموعة الأعداد الحقيقية m التي يكون من أجلها (F_m) إهليلجاً

ب- حدد العناصر المبرزة لـ (F_4) (المؤثرات - الدليلان - المساعد المركزي)

ج- أنشئ (F_4) .

(2) لكل m من D نعر النقطة M_m ذات الإحداثيات x_m المعروفة كالتالي:

M_0 هي النقطة O . نحصل على M_{n+1} انطلاقاً بالثروبة التالية:

المستقيم المار من M_n والوازي للمضيق (D) ذي المعادلة: $y = -x$

قطع (F_4) في نقطتين أحدهما أفصولاً سالبة سمعها E_n ، E'_n مماله

النقطة E_n بالنسبة لمعز الأوابب.

9. M'_n هي المسطحة العمودي لـ E'_n على محور الخافضين وكون M_{n+2} هي منتصف القطعة $[M_n M'_n]$.

أ- حيث أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هي التنايلية المعرفة بما يلي :

$$h(x) = \frac{x}{3} (\sqrt{5-x^2} + 2x) \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+2} = h(x_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ب- سأتة يوجد عدد حقيقي h من $]0, 1[$ يجب : لكل x من $[0, 1]$

$$|h'(x)| \leq h$$

ج- بين باستخدام مبرهنة التزايد المتتبع أن لكل n من \mathbb{N} :

$$|x_{n+1} - \frac{\sqrt{2}}{2}| \leq h |x_n - \frac{\sqrt{2}}{2}|$$

د- ماذا نستنتج بالسمه لتعارف المساليه $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ وما يسها ؟

9 المسوى \mathcal{P} منسوب إلى معلم متعامد مصظم $(0, \vec{i}, \vec{j})$ و

نعبر العطف $F(-1, 2)$ والمسقط (\mathcal{D}) الذي معادلته : $x - y + 4 = 0$

1) لتكن (E) مجموعة العطف M السرجف $2MF = d(M, (\mathcal{D}))$

اعط لمجموعة المجموعة (E) نم أن $7x^2 + 7y^2 + 2xy - 8x - 8y = 0$

معادلة ديكارتية لـ (E) .

2) ليكن θ الدوران الذي مركزه O وزاوية θ

2) تحول المعلم المتعامد المظم $(0, \vec{i}, \vec{j})$ إلى معلم متعامد مصظم

$$(0, \vec{i}', \vec{j}')$$

أ- ماهي معادلة (E) 3 المعلم $(0, \vec{i}', \vec{j}')$ ؟

ب- حدد قيمة θ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ التي ما أحلها تكون معادلة (E) 3

المعلم $(0, \vec{i}', \vec{j}')$ على شكل $Ax'^2 + By'^2 + Cx' + Dy' + E = 0$

ج- استمع مرة أخرى لقيمة (E)

10 المسوى \mathcal{P} منسوب إلى معلم متعامد مصظم $(0, \vec{i}, \vec{j})$

نعبر (\mathcal{C}) مجموعة العطف $M(x, y)$ من المسوى \mathcal{P} حيث

$$y = \sqrt{1-x^2-2x-3}$$

أنشئ (\mathcal{C}) .

الاحتمالات

1) التعداد :

العدد الأساسي للتعداد : إذا كانت الاحتمالات C_1, C_2, \dots, C_p تقع على التوالي n_1, n_2, \dots, n_p و n كمية مختلفة فإن عدد اليكيبات التي ننم بها هذه الاحتمالات هو : $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$

عدد التجميعات من مجموعة معينة هي أخرى . عدد التطبيقات من مجموعة منتهية E مكونة من n عنصر ($\text{card } E = n$) نحو مجموعة منتهية F مكونة من p عنصر ($\text{card } F = p$) هو : $(\text{card } F)^{\text{card } E} = p^n$ (مجموعة الإبدال F مجموعة الترمول)

عدد الترتيبات لـ p عنصر من n عنصر : لنك E مجموعة منتهية مكونة من n عنصر و $p \leq n$. كل ترتيب لـ p عنصر من E يسمى ترتيب لـ p عنصر من E . عدد هذه الترتيبات (دون تكرار) هو : $A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$. كل ترتيب لـ p عنصر من E هو تجميع . سائر من $\{1, 2, \dots, p\}$ نحو E

عدد التباديلات لـ n عنصر من بين n عنصر : كل ترتيب لـ n عنصر من بين n عنصر يسمى تباديلة لـ n عنصر وعدد هذه التباديلات هو : $A_n^n = n!$

عدد التاليفات لـ p عنصر من بين n عنصر : لنك E مجموعة منتهية مكونة من n عنصر و $p \leq n$. كل جزء A من E مكون من p عنصر يسمى تاليف لـ p عنصر من E وعدد هذه التاليفات هو : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

هويات : $C_n^p = C_n^{n-p}$ و $C_n^0 = C_n^n = 1$ و $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ و $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ و $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$
 الجبهة العدائنة

2) خصائص :

توزيع احتمال : لنك Ω كون الإمكانات لتعريف عشوائي (عشوائية) كل تجميع p من مجموعة أحداث Ω : $\mathcal{P}(\Omega)$ نحو المجال $[0, 1]$ يجب :

(1) $p(\Omega) = 1$ (2) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ إذا $A \cap B = \emptyset$ (3) $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ إذا A و B مستقلة .
 يسمى احتمال معرف على Ω والزوج (Ω, p) يسمى فضاء احتمالي منه .

حاجيات : * $p(\emptyset) = 0$ * $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ * \bar{A} حدث مضاد لـ A

* $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ * $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$

الاحتمالات

1

ليكن p احتمال على الكون $\Omega = \{a, b, c\}$

بحيث : $p(\{a, b\}) = \frac{4}{5}$ و $p(\{a, c\}) = \frac{1}{3}$

أحسب : $p(a)$ و $p(b)$ و $p(c)$. حيث $p(\{x\}) = p(x)$

الجواب : نعلم أن : $p(\Omega) = 1$ ، ومنه : $p(a) + p(b) + p(c) = 1$

لأن لدينا :

$$\begin{cases} p(a) + p(b) + p(c) = 1 & (1) \\ p(a) + p(b) = \frac{4}{5} & (2) \\ p(a) + p(c) = \frac{1}{3} & (3) \end{cases}$$

من (2) و (3) نستنتج أن : $p(a) + (p(a) + p(b) + p(c)) = \frac{4}{5} + \frac{1}{3}$

أي : $p(a) + 1 = \frac{17}{15}$

إذن : $p(a) = \frac{2}{15}$

ومنه : $p(b) = \frac{4}{5} - \frac{2}{15} = \frac{10}{15}$ و $p(c) = \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{3}{15}$

وبالتالي : $p(a) = \frac{2}{15}$; $p(b) = \frac{10}{15}$ و $p(c) = \frac{3}{15}$

2

ليكن p احتمال على الكون $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$

بحيث : $p(\{a, b, c\}) = \frac{3}{5}$ و $p(\{c, d, e\}) = \frac{9}{20}$

و $p(\{a, e\}) = \frac{7}{20}$

أحسب : $p(a)$; $p(b)$; $p(c)$; $p(d)$; $p(e)$

الجواب : نعلم أن : $p(\Omega) = 1$ ، ومنه : $p(a) + p(b) + p(c) + p(d) + p(e) = 1$

لأن لدينا :

$$\begin{cases} p(a) + p(b) + p(c) + p(d) + p(e) = 1 & (1) \\ p(a) + p(b) + p(c) = \frac{3}{5} & (2) \\ p(d) + p(c) + p(e) = \frac{9}{20} & (3) \\ p(c) + p(d) = \frac{3}{20} & (4) \\ p(a) + p(e) = \frac{7}{20} & (5) \end{cases}$$

من (3) و (5) نستنتج أن: $p(c) + \frac{7}{20} = \frac{2}{20}$ أي $p(c) = \frac{1}{10}$

لدينا: $p(d) = \frac{3}{20} - p(c)$ ، ومنه: $p(d) = \frac{7}{20}$

لدينا: $p(a) + p(b) = \frac{3}{5} - p(c)$ ، ومنه: $p(a) + p(b) = \frac{1}{2}$

لدينا: $p(e) = 1 - (p(c) + p(d) + p(a) + p(b))$ ، ومنه: $p(e) = \frac{1}{20}$

لدينا: $p(a) = \frac{7}{20} - p(c)$ ، ومنه: $p(a) = \frac{3}{10}$

ولدينا: $p(b) = \frac{1}{2} - p(a)$ ، ومنه: $p(b) = \frac{1}{5}$

وبالتالي: $p(b) = \frac{1}{5}$; $p(c) = \frac{1}{10}$; $p(d) = \frac{7}{20}$

$p(e) = \frac{1}{20}$; $p(c) = \frac{1}{10}$; $p(d) = \frac{7}{20}$

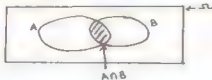
3 ليكن p احتمال على كون Ω .

ليكن A و B حدثين من Ω بحيث:

$$p(A) = \frac{1}{3} \quad , \quad p(B) = \frac{2}{5} \quad , \quad p(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{6}$$

أحسب: $p(A \cup B)$; $p(A \cap B)$

$p(B \cap \bar{A})$; $p(\bar{A} \cap \bar{B})$



الجواب: لدينا:

لدينا $A \cap B \neq \emptyset$ و $A \cap B$ حدثين غير منسجمين أي: $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$$

ومنه: $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$ أي:

$$p(A \cap B) = p(A) - p(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$p(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

لدينا: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$p(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6}$$

$$p(A \cup B) = \frac{17}{30}$$

$$(B \cap A) \cap (B \cap \bar{A}) = \emptyset \quad \text{لدينا:} \quad B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}) \quad \text{لذا:}$$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(B \cap \bar{A}) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(B \cap \bar{A}) = \frac{7}{30} \quad \text{ومنه:}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) \quad \text{لدينا:}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \frac{17}{30}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{13}{30} \quad \text{ومنه:}$$

4 ليكن P احتمال على كون A و B حدثين مع P بحيث:

$$P(A) = 0,80 \quad ; \quad P(B) = 0,30 \quad ; \quad P(A \cup B) = 0,86$$

(1) احسب: $P(A/B)$

(2) هل الحدثين A و B مستقلان؟

(3) ليكن C حدث مع P بحيث: $P((B \cap C)/A) = 0,2$

احسب: $P(C \cup \bar{B} \cup \bar{A})$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{الجواب: (1) لدينا:}$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \quad \text{وبما أن:} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A/B) = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)} \quad \text{ومنه:}$$

$$P(A/B) = \frac{0,80 + 0,30 - 0,86}{0,30}$$

$$P(A/B) = 0,80 \quad \text{لذا:}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad \text{أي:} \quad P(A/B) = P(A) \quad \text{بما أن: (2)}$$

فإن الحدثين A و B مستقلان .

$$P(C \cup \bar{A} \cup \bar{B}) = P(C \cup (\overline{A \cap B})) \quad \text{أيضاً :}$$

$$= 1 - P(\overline{C \cap (A \cap B)})$$

$$= 1 - P(\bar{C} \cap (A \cap B))$$

$$P(\bar{C} \cap (A \cap B)) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) \quad \text{ولدينا:}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P((C \cap B)/A) \times P(A) \quad ;$$

$$P(C \cup \bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) - P((C \cap B)/A) \times P(A) \quad \text{ومنه :}$$

$$= 1 - P(A) \times P(B) - P((C \cap B)/A) \times P(A)$$

$$P(C \cup \bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A) (P(B) - P((C \cap B)/A)) \quad \text{إذن :}$$

$$= 1 - 0,80 (0,30 - 0,2)$$

$$P(C \cup \bar{A} \cup \bar{B}) = 0,92 \quad \text{وبالتالي :}$$

5

يعرض صندوق على 10 كرات . n كرة منهن هذه الكرات سوداء والباقى بيضاء . سحبت تاساً كرسى من هذا الصندوق (أ) ماهو الاحتمال لكي تكون الكرات المسحوبات

أ- مختلفين اللون

ب- سوداوين اللون

ج- بيضاوين اللون

(د) حدد n التي من أجلها يكون الاحتمال الأحمر يساوي $\frac{7}{45}$.

$n(N)$

$(10-n)(B)$

الجواب : (أ) ليكن n تكون الاحتمالات .

$$\text{لدينا : } C_{10}^2 = 45$$

أ- الحدث "A" الاحتمال على كرتين مختلفين اللون

$$C_{10-n}^2 A = C_n^2 \times C_{(10-n)}^2 = n(10-n)$$

$$P(A) = \frac{C_{10-n}^2 A}{C_{10-n}^2} = \frac{n(10-n)}{45} \quad \text{ومنه :}$$

ب- الحدث "الاحول على كرتين سوداويتين"

$$\text{card } B = C_{(10-n)}^2 = \frac{(10-n)(9-n)}{2}$$

$$p(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \frac{(10-n)(9-n)}{90} \quad \text{ومنه}$$

ج- الحدث "الاحول على كرتين بيضاويتين"

$$\text{card } C = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$p(C) = \frac{\text{card } C}{\text{card } \Omega} = \frac{n(n-1)}{90} \quad \text{ومنه}$$

$$p(C) = \frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{90} = \frac{7}{15} \quad (1) \text{ لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 42 = 0$$

$$p(C) = \frac{7}{15} \Leftrightarrow n = 7 \quad (n \in \mathbb{N}^+ \quad \text{نلاحظ})$$

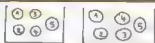
6 لدينا صندوقين U_1 و U_2 كل واحد منهما يحتوي على 5 كرات

مرفقة من 1 إلى 5. تسحب في آن واحد وبعده عشوائية كرتين من U_1 وكرت واحدة من U_2 . أحسب احتمال الأحداث التالية:

A "الاحول على رصفت فردية ورغم زوجي".

B "الاحول على ثلاثة أرقام زوجية".

C "الاحول على ثلاثة أرقام مجموعها عدد زوجي".



U_1



U_2

	U_1	U_2
I فردي	II	P
P زوجي	IP	I

U_1	U_2
PP	P

U_1	U_2
II	P
IP	I
PP	P

الاجواب: ليكن Ω كون في مكانيات،

$$\text{card } \Omega = C_5^2 C_3^1 = 50$$

$$\text{card } A = C_3^1 C_2^1 + C_3^2 C_1^1 = 24 \quad \text{لدينا}$$

$$p(A) = \frac{24}{50} = 0,48 \quad \text{إذن}$$

$$\text{card } B = C_2^2 \times C_3^1 = 2 \quad \text{لدينا}$$

$$p(B) = \frac{2}{50} = 0,04 \quad \text{إذن}$$

$$\text{card } C = C_3^1 C_2^1 + C_3^2 C_1^1 + C_2^2 C_1^1 = 26$$

$$p(C) = \frac{26}{50} = 0,52 \quad \text{لدينا}$$

7 ليكن n من n^* بحيث: $n > 1$ وليكن S صندوق يحتوي على كرة واحدة تحمل الرقم 1 وكرتين يحملان الرقم 2 ... و n كرة تحمل الرقم n .

- (1) كم عدد الكرات الموجودة في الصندوق S ؟
- (2) نضرب عشوائياً كرة من الصندوق S (نفرض أن العدد n زوجي) ما هو الاحتمال لكي تكون الكرة المستعوبة
 - أ- تحمل رقماً زوجياً .
 - ب- تحمل رقماً فردياً .
- (3) نفرض في هذا السؤال أن عدد الكرات الموجود $x > 2$ في الصندوق S هو 21 ما هو الاحتمال لكي تكون الكرة المستعوبة تحمل رقماً أكبر قسماً من 4.

الجواب : (1) عدد الكرات الموجودة هو:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) نفرض أن $n = 2p$ ، ليكن n يكون المتكافئ $C_{n(n+1)}^1$

أ- الحدث "A" الحصول على كرة تحمل رقماً زوجياً .
 $S_{\text{odd}} = \frac{n(n+1)}{2}$

$$S_{\text{odd}} A = 2 + 4 + 6 + \dots + 2p$$

$$= 2(1 + 2 + \dots + p)$$

$$= 2 \left(\frac{p(p+1)}{2} \right)$$

$$S_{\text{odd}} A = \frac{n(n+1)}{4} \quad \text{حيث أن } p = \frac{n}{2}$$

$$P(A) = \frac{\frac{n(n+1)}{4}}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$P(A) = \frac{n+1}{2(n+1)}$$

ب- الحدث "B" الحصول على كرة تحمل رقماً فردياً .

$$P(B) = 1 - P(A) \quad \text{لدينا: } B = \bar{A} \quad \text{ومن هنا:}$$

$$P(B) = \frac{n}{2(n+1)} \quad \text{أي:}$$

$$(3) \text{ إذا كان } \frac{n(n+1)}{2} = 21 \text{ فإن } n^2 + n - 42 = 0$$

$$\text{لذا: } n^2 + n - 42 = 0 \Leftrightarrow n = 6 \text{ أو } n = -7$$

ومما أن: $n \in \mathbb{N}^*$ فإن: $n = 6$.

الحدث "C" الحصول على كرة تحمل رمزاً أكبر قطعاً من 4

لدينا رقمين أكبر قطعاً من 4 هما: 5 و 6.

$$\text{إذن: } \text{card } C = 5 + 6 = 11$$

$$\text{وهو: } p(C) = \frac{11}{21}$$

8

نحتوي صندوقاً (V) على 4 كرات حمراء تحمل الأرقام 0-1-2-3.

3 كرات خضراء تحمل الأرقام: 2-1-0.

(1) سحب بالتتابع وبدون إحلال 3 كرات من الصندوق (V) أحسب احتمال الأحداث التالية:

A "الحصول بالضبط على كرتين من نفس اللون"

B "الحصول على ثلاثة أرقام مختلفة مثني، مثني"

C "علماً أن الكرة المسحولة الأولى تحمل رقم 0 فما هو

الاحتمال أن تكون المساحة والثالثة لهما نفس الرقم"

(2) سحب متتابع 3 كرات من الصندوق (V) وبكسر مجموع الأرقام

المسحولة.

حدد قيم S وأحسب احتمال القيمة لـ S.

4Ⓚ 0, 1, 2, 3

5Ⓚ 2, 2, 1, 1, 0

(U)

الجواب: (1) ليكن Ω تكون الممكنات.

$$\text{لدينا: } \text{card } \Omega = A_3^3 = 504$$

A "الحصول بالضبط على كرتين من نفس اللون"

(R, R, V) أو (V, V, R) عدد حالات تريبس الألوان هو $C_3^2 = 3$

$$\text{إذن: } \text{card } A = 3 \times A_3^2 \times A_4^1 + 3 \times A_5^1 \times A_4^2 = 420$$

$$\text{وهو: } p(A) = \frac{420}{504} = \frac{5}{6}$$

B " الحصول على ثلاثة أرقام مختلفة متى ، متى " .

(1,2,3) أو (0,2,3) أو (0,1,3) أو (0,1,2)

وعدد حالات توزيع الأرقام هو $3! = 6$

إذن $\text{card } B = 6 (A_1^1 \times A_2^1 \times A_3^1 + A_1^1 \times A_2^1 \times A_3^1 + A_1^1 \times A_2^1 \times A_3^1 + A_1^1 \times A_2^1 \times A_3^1 + A_1^1 \times A_2^1 \times A_3^1 + A_1^1 \times A_2^1 \times A_3^1)$

$$\text{card } B = 234$$

$$p(B) = \frac{234}{504} = \frac{13}{28} \quad \text{ومنه .}$$

C " علمائ الكرة المحمل عليها في السجدة الأولى رقم 0 ففاهو الاحتمال

أن تكون الشايضة والشاشنة من نفس اللون . "

لدينا الاحتمال الشرطي .

يعتبر الحدث C_1 " الحصول على الرقم 0 في السجدة الأولى " .

و C_2 " الحصول على كرسى من نفس الرقم في السجدة

الثانية والثالثة " .

$$C_1 \leftarrow (0, ? , ?)$$

C_2 من $(1, 2, 1)$ أو $(1, 0, 0)$ أو $(2, 2, 2)$

الاحتمال المطلوب :

$$p(C) = \frac{p(C_2 | C_1)}{p(C_2)}$$

$C_1 \cap C_2$ " الحصول على الرقم 0 في السجدة الأولى وعلى كرسى من نفس

الرقم في السجدة الثانية والثالثة " .

أي : $(0, 1, 1)$ أو $(0, 2, 2)$.

لجسأ ، $\text{card}(C_1 \cap C_2) = A_1^1 A_2^1 + A_1^1 A_3^1 = 24$ إذن $p(C_1 \cap C_2) = \frac{24}{504}$

إذن $\text{card } C_1 = A_1^1 A_2^1 A_3^1 = 112$ و $p(C_1) = \frac{112}{504}$

$$p(C) = \frac{24}{112} = \frac{3}{14} \quad \text{ومنه .}$$

(3) نلخص تيم 5 في الجدول التالي .

S=1	S=2	S=3	S=4	S=5	S=6	S=7
{0,0,1}	{0,0,1} {0,1,1}	{0,1,3} {0,2,2} {1,1,1}	{0,1,3} {0,2,2} {1,1,2}	{0,2,3} {1,1,3} {1,2,2}	{1,2,3} {2,1,2}	{2,2,3}

لیکے کے لیے ممکنہ نتائج : $S=9 = 84$

$$p(S=1) = \frac{C_1^1 C_2^1}{84} = \frac{3}{84}$$

$$p(S=2) = \frac{C_2^1 C_3^1 + C_1^2 C_2^1}{84} = \frac{9}{84}$$

$$p(S=3) = \frac{C_1^1 C_2^1 C_3^1 + C_1^2 C_2^1 + C_1^3 C_2^1}{84} = \frac{20}{84}$$

$$p(S=4) = \frac{C_1^1 C_2^1 C_3^1 + C_1^2 C_2^1 + C_1^3 C_2^1}{84} = \frac{21}{84}$$

$$p(S=5) = \frac{C_1^1 C_2^1 C_3^1 + C_1^2 C_2^1 + C_1^3 C_2^1}{84} = \frac{18}{84}$$

$$p(S=6) = \frac{C_1^1 C_2^1 C_3^1 + C_1^2 C_2^1}{84} = \frac{10}{84}$$

$$p(S=7) = \frac{C_1^1 C_2^1}{84} = \frac{3}{84}$$

9

تحتوی ہے دو علی کریم سپر مارکیٹ و تلات کرات حمراء

و خمس کرات سوداء .

سحب بالسيارة و باحلال تلات کرات من الصناديق ، ما هي احتمالات

الاحداث التالية :

A " سحب كرة بيضاء ثم كرة سوداء ثم كرة حمراء "

B " سحب كرة من كل لون "

C " سحب كرة حمراء خلال السجبة الثانية "

D " سحب كرة حمراء خلال السجبة الثانية ، لأول مرة "

E " سحب علي الأقل كرتين سوداوتين "

F " سحب علي الاكثر كرة بيضاءتين "

الاجابات : ليکے کے لیے ممکنہ امکانات

2(B) 5(N)
3(R)

$$\text{عدد } R = 10^3 = 1000$$

لدينا:

A: سحب كرة بيضاء ثم كرة سوداء ثم كرة حمراء
(B, N, R)

$$\text{عدد } A = 2 \times 5 \times 3 = 30 \quad \text{لدينا}$$

$$P(A) = \frac{30}{1000} = 0,030 \quad \text{ومنه}$$

B: سحب كرة من كل لون ← (B, N, R) وعدد الترتيبات لهذه الألوان هو: $3! = 6$

$$\text{عدد } B = 6 (2 \times 5 \times 3) = 180$$

$$P(B) = \frac{180}{1000} = 0,180 \quad \text{ومنه}$$

C: سحب كرة حمراء في السحب الثلاثة ← (R, R, R)

$$\text{عدد } C = 10 \times 3 \times 10 = 300$$

$$P(C) = \frac{300}{1000} = 0,300 \quad \text{ومنه}$$

D: سحب كرة حمراء في السحب الثلاثة والأول مرة ← (R, R, ?)

$$\text{عدد } D = 7 \times 3 \times 10 = 210$$

$$P(D) = \frac{210}{1000} = 0,210 \quad \text{ومنه}$$

E: سحب على الأقل كرتين سوداوتين ←

$$C_3^2 = 3 \quad \text{عدد الحالات الممكنة للترتيب هو} \quad \begin{cases} (N, N, \bar{N}) \\ \text{أو} \\ (N, \bar{N}, \bar{N}) \end{cases}$$

$$\text{عدد } E = 3(3 \times 7) + 3 = 216$$

$$P(E) = \frac{216}{1000} = 0,216 \quad \text{ومنه}$$

F: سحب على الأكثر كرتين بيضاوتين ←

$$C_3^2 = 3 \quad \text{عدد الحالات الممكنة للترتيب هو} \quad (B, B, \bar{B})$$

$$C_3^1 = 3 \quad \text{عدد الحالات الممكنة للترتيب هو} \quad (B, \bar{B}, \bar{B})$$

$$\text{أو} \quad (\bar{B}, \bar{B}, \bar{B})$$

$$P(F) = \frac{992}{1000} = 0,992 \quad \text{ومنه} \quad \text{إذن: } \text{عدد } F = 3(2 \times 8 + 2 \times 8^2) + 8^3 = 992$$

10

عشر صيد وتبين : U_1 يعوى على 3 كرات بيضاء وكرتين لونهما أسود
 U_2 يعوى على كرتين لونهما أسود وكرتين لونهما أسود

١- تعتبر التجربة "ع" سحب تائباً كرتين من U_1 ونسحب تائباً كرتين من U_2
 ٢- ما هو الاحتمال الحصول على الأقل كرتين لونهما أبيض؟

٣- نكرر التجربة ٤ خمس مرات متتالية وعند كل مرة نعد الكرتين
 والاهتدوق الذي سيجئ منه .

هو احتمال الحصول على الأقل كرتين لونهما أبيض بالهبط ثلاث مرات؟

٤- سحب تائباً كرتين من U_1 ونضعهما 3 U_2 ثم نسحب بالناسخ وبدون
 إحلال ثلاث كرات من U_1 .

٥- علماً أن الكرتين المسحوبتين من U_1 بيضا وسنق مما هو احتمال
 سحب كرتين بيضا وتبين وكرة سوداء من U_2 ؟

٦- علماً أن الكرتين المسحوبتين من U_1 لهما نفس اللون فما هو احتمال
 سحب كرتين بيضا وتبين وكرة سوداء من U_2 ؟

الحواب

3B	2N
----	----

 U_1

2B	2N
----	----

 U_2

١- عدد امكاسات التجربة "ع" هو $\text{card } \Omega = C_3^2 \times C_4^2 = 60$

٢- الحدث A "الحصول على الأقل كرتين لونهما أبيض".

لذا الحدث \bar{A} "الحصول على الأكثر كرة بيضاء" بـ 4N أو 3N

U_1	BN	NN	NN
U_2	NN	BN	NN

العلاقات الممكنة هي :

$$\text{card } \bar{A} = C_3^1 C_2^1 C_2^2 + C_2^1 C_2^1 C_2^2 + C_2^1 C_2^1 = 11$$

$$P(\bar{A}) = \frac{11}{60} \quad \text{ومنه :}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{11}{60} \quad \text{إذاً :}$$

$$P(A) = \frac{49}{60} \quad \text{أي :}$$

ب- احتمال الحصول على الحدث A ثلاث مرات بالهبط خلا لإعادة التجربة "ع"
 خمس مرات متتالية هو :

$$P = C_5^3 (p(A))^3 (1-p(A))^2 = 10 \left(\frac{49}{60}\right)^3 \left(\frac{11}{60}\right)^2$$

$$P = \frac{14835529}{23814} \cdot 10^{-4}$$

(ع) أن يعتبر الحدثين :

الحدث B_1 : "الجمهور يذكر بين يمينها وليس من V_1 "
 B_2 : "الجمهور على كر بين يمينها ويتبين كره سوداء من V_2 "

المطلوب حساب $P(B_2/B_1)$:

$$P(B_2/B_1) = \frac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)}$$

$$P(B_2 \cap B_1) = \frac{C_3^2 \times A_4^1 \times A_2^1}{C_3^2 A_6^2}$$

$$P(B_1) = \frac{C_3^2}{C_5^2}$$

$$P(B_2/B_1) = \frac{A_4^1 A_2^1}{A_6^2} = \frac{1}{5}$$

ب - يعتبر الحدث "C" الجمهور على كر بين حد نفس اللون من V_1

المطلوب حساب $P(B_2/C)$

$$P(B_2/C) = \frac{P(B_2 \cap C)}{P(C)}$$

$$P(B_2 \cap C) = \frac{C_3^2 \times A_4^1 \times A_2^1 + C_2^1 \times A_2^2 \times A_4^1}{C_5^2 \times A_6^2} = \frac{80}{1200}$$

$$P(C) = \frac{C_3^2 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{4}{10}$$

$$P(B_2/C) = \frac{1}{2}$$

11 تكون مجموعة من الأشخاص من ثمانية رجال وأربع نساء من
سليم رجل واحد يسمى إبراهيم وإمرأة تسمى فاطمة .

تريد هذه المجموعة ، بواسطة القرعة واختيار لجنة مكونة من
ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام .

(أ) ماهو عدد اللجن التي يمكن تكوينها ؟

(ب) احسب احتمال كل من الأحداث التالية :

A "تكوين لجنة تضم ثلاثة رجال"

B "تكوين لجنة تضم رجلاً وامراً اثنين"

C "تكوين لجنة تضم إما إبراهيم وإما فاطمة"

الحواب : (أ) عدد اللجن التي يمكن تكوينها هو : $n = C_{12}^3 = 220$

(ب) لذا : $P(A) = \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$

$$P(B) = \frac{C_8^1 \times C_4^2}{C_{12}^3} = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$$

$$P(C) = \frac{C_8^1 C_{10}^1 + C_1^1 C_{10}^1}{C_{12}^3} = \frac{90}{220} = \frac{9}{22}$$

12 يحوي كس على 3 كرات سماء و 4 كرات سوداء غير قابل للتميز

اللمس

يجري سلسلة من المعينات و كل سحبة سأخذ عسوا سأكره من الكيس

إذا كانت سوداء سوف عى السحب وده أكاس سماء لا بعدد ما إلى الكس

وتسحب كرة أخرى وهكذا دواليك .

احسب احتمال الحدثين :

A : "الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء"

B : "الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء"

3B , 4N

الحواب : لذا $P(A) = \frac{C_3^1}{C_7^1} = \frac{3}{7}$

$$P(B) = \frac{C_3^1}{C_7^1} \times \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{2}{7}$$

13

يجب على متسابق أن يجتاز n حاجزاً O_1, O_2, \dots, O_n .
نفترض أن احتمال اجتياز الحاجز O_n بنجاح هو $\frac{1}{2^n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
(نفرض أن التفرعات متصلة فيما بينها)

- (1) ماهو احتمال أن يعبر المتسابق جميع الحواجز بنجاح ؟
- (2) ماهو الاحتمال أن يفشل المتسابق فقط في اجتياز الحاجز رقم k ؟
- (3) ماهو الاحتمال أن يفشل المتسابق في اجتياز حاجز واحد فقط ؟

الجواب : (1) لحدث A الحد : " اجتياز جميع الحواجز بنجاح "

أي : O_1, O_2, \dots, O_n مستقلة

$$P(A) = P(O_1) \times P(O_2) \times \dots \times P(O_n)$$

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{(1+2+\dots+n)}$$

ومنه : $P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ لأن : $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) الحدث B_k : " الفشل فقط في الحاجز رقم k "

أي : $O_1, O_2, \dots, O_{k-1}, O_{k+1}, \dots, O_n$

$$P(B_k) = P(O_1) \times P(O_2) \times \dots \times P(O_{k-1}) \times P(O_{k+1}) \times \dots \times P(O_n)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{(1+2+\dots+(k-1)+(k+1)+\dots+n)}$$

$$P(B_k) = (2^k - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

(3) الحدث B : " الفشل في اجتياز حاجز واحد "

أي : $B = \bigcup_{k=1}^n B_k$ $B_i \cap B_j = \emptyset$ $i \neq j$

ومنه : $P(B) = \sum_{k=1}^n P(B_k)$

$$= \sum_{k=1}^n (2^k - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{k=1}^n (2^k - 1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot [2 \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}\right) - n]$$

وبالتالي : $P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (2^{n+1} - n - 2)$

14 لدينا صندوقاً مرفعة من 1 إلى n حيث n عدد فردي أكبر من 1. كل صندوق يحمل رقمًا k يحتوي على k كرة صفراء وعلى $(n-k)$ كرة سوداء. نختار عشوائياً صندوقاً من بين الهناديف ثم ن سحب منه عشوائياً كرة واحدة.

- (1) ماهو الاحتمال احसार صندوق يحمل رقمًا فردياً ؟
- (2) ماهو احتمال سحب كرة بيضاء ؟
- (3) ماهو الاحتمال لكي تكون الكرة المسحوبة بيضاء إذا علمنا أنها مسبوقة من صندوق يحمل رقمًا فردياً ؟
- (4) إذا علمنا أن الكرة المسحوبة سوداء ف ماهو الاحتمال لكي تكون مسبوقة من صندوق يحمل رقمًا فردياً ؟

الجواب : (1) لدينا n صندوقاً مرفعة من 1 إلى n حيث n فردي أكبر من 1

$$\{1, 3, \dots, n\}$$

$$n = 2k + 1$$

$$(n)$$

$$1 \leq k \leq 2k + 1$$

الحدث "A" الصندوق يحمل رقمًا فردياً ؟

بما أن عدد الهناديف هو n وعدد الهناديف التي تحمل رقمًا فردياً هو $k+1$

فإن :
$$p(A) = \frac{k+1}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

(2) الحدث "B" الكرة المسحوبة بيضاء ؟

الحدث "B" اختيار الصندوق الذي يحمل رقم k

بما أن B_1, B_2, \dots, B_n و $B_i \cap B_j = \emptyset$; $i \neq j$ و $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$; $B = B \cap \Omega$

فإن :
$$p(B) = \sum_{i=1}^n p(B \cap B_i)$$

وبما أن $p(B \cap B_k) = p(B_k) \cdot p(B/B_k)$ و $p(B_k) = \frac{1}{n}$ لكل $1 \leq k \leq n$

فإن :
$$p(B) = \sum_{k=1}^n p(B_k) p(B/B_k)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p(B/B_k)$$

$$(p(B/B_k) = \frac{k}{n} \text{ : لـ } k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

وبالتالي :
$$p(B) = \frac{n+1}{2n}$$
 و $\left(\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ : لـ } k \right)$

15 يحتوي صندوق على أربع كرات حمراء وثلاث خضراء (لا يمكن

التمييز بين جميع الكرات باللمس)
تسحب كرة واحدة من الصندوق :

- إذا كانت حمراء تسحب ثانية كرتين من الكرات المتبقية
- إذا كانت خضراء تسحب بالسابع وبدون إحلال كرتين من الكرات المتبقية.
- (1) ٩- ماهو عدد الإمكانيات ؟
- ب- أحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون .
- (2) إذا علمت أنه حصلنا على كرتين حمراء وكرتين خضراء . أحسب احتمال أن تكون الكرة الأولى المسحوبة خضراء .

3 (V) 4 (R)

الاجاب : (1) أ- لدينا C_4^2 إمكانية لسحب كرة حمراء

من الصندوق و C_3^2 إمكانية لسحب كرتين تأتيا
من الكرات المتبقية .

وبالتالي C_4^2 إمكانية لسحب كرة حمراء من الصندوق و A_6^2 إمكانية لسحب
كرتين بالسابع وبدون إحلال من بين الكرات المتبقية
ومنه عدد الإمكاسات هو :
$$n(A) = C_4^2 \times C_3^2 + C_3^2 \times A_6^2 = 150$$

حيث أن كون الإمكانيات .

ب- " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون " ← 3 (V) أو 3 (R)

ليكن A_1 الحدث : " الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء " .
 B_2 الحدث : " الكرتان المسحوبتان في المرة الثانية حمراء " .
 B_2 الحدث : " الكرتان المسحوبتان في المرة الثانية خضراء " .
 \bar{A}_1 الحدث : " الكرة المسحوبة في المرة الأولى خضراء " .
لدينا : $(A_1 \cap B_2) \cap (\bar{A}_1 \cap B_2) = \emptyset$ و $A = (A_1 \cap B_2) \cup (\bar{A}_1 \cap B_2)$

$$P(A) = P(A_1 \cap B_2) + P(\bar{A}_1 \cap B_2) \quad \text{ومنه :}$$

$$= P(A_1)P(B_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(B_2|\bar{A}_1)$$

$$P(A) = \frac{4}{7} \times \frac{C_3^2}{C_6^2} + \frac{3}{7} \times \frac{A_6^2}{A_6^2} = \frac{1}{7} \quad \text{أي :}$$

(2) لنحسب احتمال سحب كرة خضراء في المرة الأولى علماً أننا حصلنا على كرتين خضراوين بالخطم. (لدينا احتمال شرطي)

A_2 الحدث: "الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء"

B_2 الحدث: "الكرتان المسحوبتان في المرة الثانية خضراوتان"

C الحدث: "الكرتان المسحوبتان في المرة الثانية مختلفتا اللون"

E "هي بين الكرات الثلاثة المسحوبة كرتين خضراوين بالخطم"

المطلوب حساب: $P(\bar{A}_2/E)$

$$P(\bar{A}_2/E) = 1 - P(A_2/E)$$

$$= 1 - \frac{P(A_2 \cap E)}{P(E)} = 1 - \frac{P(A_2)P(E/A_2)}{P(E)}$$

$$(A_2 \cap B_2) \cap (\bar{A}_2 \cap C) = \emptyset \quad ; \quad E = (A_2 \cap C) \cup (A_1 \cap B_2) \quad \text{لدينا}$$

$$P(E) = P(\bar{A}_2 \cap C) + P(A_2 \cap B_2) \quad \text{وهنا}$$

$$= P(\bar{A}_2)P(C/\bar{A}_2) + P(A_2)P(B_2/A_2)$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{2A_3A_6}{A_2^2} + \frac{4}{4} \times \frac{C_3^2}{C_6^2}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{8}{15} + \frac{4}{4} \times \frac{3}{15}$$

$$P(E) = \frac{12}{35} \quad \text{وهنا}$$

$$P(E/A_2) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$P(\bar{A}_2/E) = 1 - \frac{\frac{4}{4} \times \frac{3}{5}}{\frac{12}{35}} \quad \text{لدينا}$$

$$P(\bar{A}_2/E) = \frac{2}{3} \quad \text{وبالتالي}$$

16 نعتبر برداً له وجه يحمل رقم 1 ووجهان يحملان رقم 2 ولانة وجوه تحمل رقم 3. نعتبر بعدد وراً بعنوان على 3 كرات حمراء وعلى 4 كرات خضراء. نعتبر التجربة (E). "رمى النرد فحصل على رقم k ثم سحب كرتين k كرة هذا الهدف وف" ($k \in \{1, 2, 3\}$)

(1) ماهو احتمال الحصول على كرات حمراء فقط؟
(2) ماهو احتمال الحصول على كرات خضراء فقط علماً أن الرد أعطى رقمًا مزدوجًا؟

الجواب : لنسأ . $\boxed{3 \text{ @ } 4 \text{ (V)}}$: التردد D $\begin{matrix} 4 \\ 2-1 \\ 3-3-3 \end{matrix}$ (V)

(1) نعتبر الحدث : D : التردد D أعطى رقم x ، $x \in \{4, 3, 2\}$ والحدث : R : "العمول على كرات حمراء"

لنينا : $P(R) = P(D_1)P(R|D_1) + P(D_2)P(R|D_2) + P(D_3)P(R|D_3)$

$$P(R) = \frac{1}{6} \times \frac{C_1^4}{C_3^4} + \frac{2}{6} \times \frac{C_2^4}{C_3^4} + \frac{3}{6} \times \frac{C_3^4}{C_3^4} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$$

(2) احتمال العمول على كرات حمراء معطى علاماً التردد أعطى رقمًا موزناً

$$P(V|D_1 \cup D_2) = \frac{P(V \cap (D_1 \cup D_2))}{P(D_1 \cup D_2)} \quad \text{هو :}$$

بحث V الحدث "العمول على كرات خضراء"

$$P(V|D_1 \cup D_2) = \frac{P(D_1)P(V|D_1) + P(D_2)P(V|D_2)}{P(D_1) + P(D_2)}$$

$$P(V|D_1 \cup D_2) = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{C_1^4}{C_3^4} + \frac{2}{6} \times \frac{C_2^4}{C_3^4}}{\frac{1}{6} + \frac{2}{6}} = \frac{8}{5}$$

17 تضم لياقته اللياقة صغرة الحجم 20 معقد مرفعة من 1 إلى 20.

بعد دراسات متعددة تبين أن النسبة المتوسطة للمقاعد المعجوزة

ساعة قبل الإقلاع هي 70%.

تقدم مسافر ساعة قبل الإقلاع ، لعجز مقعد .

(1) نفرض أن كل المقاعد لها نفس الاحتمال لكي تكون معجوزة ،

ما هو الاحتمال لكي يجد المسافرين

أ- مقعداً ما ساعراً ؟

ب- ثلاثة مقاعد بالضبط نفساً ؟

(2) نفرض أن النسبة المتوسطة للمقاعد المعجوزة التي تعمل رقمًا موزناً

هو نصف النسبة المتوسطة للمقاعد المعجوزة التي تعمل رقمًا موزناً .

ما هو الاحتمال لكي يجد المسافر معقدًا ساعراً يعمل رقمًا فائقاً للنسبة على 5 ؟

الجواب : (1) أ- الحدث A "المسافر يجد مقعداً ما ساعراً"

الحدث \bar{A} : "المسافر يجد مقعداً معجوزاً"

لدينا : $p(\bar{A}) = \frac{30}{100}$: إذن $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{30}{100}$

ومنه : $p(A) = 0,70$

ب - الحدث "B" : المسافر يجد بالفيظ تذكرة متقاعد شاغراً

أي : " المسافر يجد 17 مقعد معجوز "

بما أن أن الاحتمال يحسب بالنسبة المئوية : فإنه لدينا :

$$20 \times \frac{7}{100} = 14 \rightarrow \frac{70}{100}$$

$$17 \rightarrow p(B)$$

ومنه : $p(B) = 0,85$ أي : $p(B) = \frac{70 \times 17}{100 \times 14}$

ج - ليكن C الحدث " المسافر يجد مقعداً بجمل رتما فابلا للقسمة " :
القسمة على 5

لدينا : $C = C_1 \cup C_2$ حيث $C_1 = \{5, 15\}$ و $C_2 = \{10, 20\}$

ولدينا : $C = (C \cap A) \cup (C \cap \bar{A})$ حيث $(C \cap A) \cap (C \cap \bar{A}) = \emptyset$

A الحدث " : المسافر يجد مقعداً شاغراً "

إذن : $p(C) = p(C \cap A) + p(C \cap \bar{A})$

$$p(C \cap A) = p(C) - p(C \cap \bar{A})$$

$$= p(C) - p(\bar{A})p(C/\bar{A})$$

$$= \frac{4}{20} - \frac{70}{100} \times p(C/\bar{A})$$

لدينا : $p(C/\bar{A}) = p(C_1/\bar{A}) + p(C_2/\bar{A})$

ليكن : $p(C_1/\bar{A}) = 2p$ و $p(C_2/\bar{A}) = 2q$

p و q هما احتمال سبب مقعداً علمياً لهما يعملان على التوالي

زعم عدد فردي ورقم زوجي : يعني : $5(2p + 2q) = 1$
 $q = 2p$

وإذاً : $30p = 1$ أي : $p = \frac{1}{30}$ ومنه : $q = \frac{2}{30}$

وبالتالي : $p(C \cap A) = 0,06$ أي : $p(C \cap A) = \frac{4}{20} - \frac{70}{100} \times \frac{1}{5}$

18 يعطى صندوقي U_1 على ثلاث كرات خضراء وكوب حمرانين ويعطى

صندوق U_2 على ثلاث كرات حمران وكوبتين خضراوين.

نستخرج كرة واحدة من الصندوق U_1 ونسحب سائبا كرتا من الصندوق U_2 (باعتبارهما لا يمكن التمييز بين الكرتين من جميع الكرات)

(أ) احسب احتمال الأحداث التالية:

أ " الحصول على كوبين حمرانين وكرة خضراء "

ب " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

(ب) احسب احتمال الحصول على كرة خضراء على الأقل علما بأن الكرة المسحوبة

من الصندوق U_1 حمران .

3	2
V	R

U_1

3	2
R	V

U_2

U_1	R	V
U_2	RV	RR

الجواب : (أ) ليكن Ω تكون المكانيات .

$$\text{card } \Omega = C_5^1 \times C_5^2 = 50 \quad \text{لدينا}$$

أ " الحصول على كوبين حمرانين وكرة خضراء "

$$\text{card } A = C_2^1 C_3^1 + C_3^1 C_2^1 = 2 \times 2 = 4$$

$$P(A) = \frac{4}{50} \quad \text{ومنه .}$$

ب " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

$$\text{card } B = C_2^1 C_3^2 + C_3^1 C_2^2 = 3$$

$$P(B) = \frac{3}{50} \quad \text{ومنه .}$$

(ب) احسب احتمال الحصول على كرة خضراء على الأقل علما بأن الكرة المسحوبة

من الصندوق U_1 حمران . (احتمال مشروط)

ليكن : أ " الحصول على كرة خضراء على الأقل "

ب : " الكرة المسحوبة من U_1 حمران "

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{لأن المطلوب هو حساب .}$$

$$P(B) = \frac{C_2^1}{C_5^1} = \frac{2}{5} = \frac{20}{50} \quad \text{لدينا .}$$

بند " الحصول على الأقل كرة خضراء والكرة المسحوبة من U_1 حمران "

U_1	R	R
U_2	RV	RR

$$P(A \cap B) = \frac{C_2^1 C_3^1 + C_2^1 C_3^1}{50} = \frac{4}{50}$$

$$P(A|B) = 0,90$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{4}{50}}{\frac{20}{50}} \quad \text{أي .}$$

19 في مصنع ، نقوم باسداء تقني لمصالح الآلات التي وقعت فيها عيب . لكل اسبوع نقرر بالسحب نكل آلة بسدعي التقني أم لا . بالنسبة لبعض الآلات لاحتمل التقني أنه ،
يجب التدخل في الأسبوع الأول .

* وإذا تدخل في الأسبوع n ، احتمال التدخل في الأسبوع $(n+1)$ هو $\frac{3}{4}$.
* وإذا لم يتدخل في الأسبوع n ، احتمال التدخل في الأسبوع $(n+1)$ هو $\frac{1}{10}$.
نخرج بـ E_n بالحدث : " التقني تدخل في الأسبوع n "

و نمر بـ P_n باحتمال حدوث E_n أي : $P_n = P(E_n)$
(أ) أحسب الاحتمالات التالية :

(أ) $P(E_{n+1}/E_n)$ و $P(E_{n+1}/\bar{E}_n)$ و $P(E_1)$
(ب) حدد بدلالة P_n الاحتمالين :

(ج) استنتج أن : $P_{n+1} = \frac{13}{20} P_n + \frac{1}{10}$ ،
(د) حدد P_n بدلالة n (يمكنك وضع : $q_n = P_n - \frac{1}{4}$)

(5) ماهي قسم n لكي يكون احتمال تدخل التقني في الأسبوع n ، أضعف من أو يساوي $\frac{3}{10}$.

الجواب . (أ) الحدث E_n المعنى تدخل في الأسبوع n $n \in \mathbb{N}^*$

وإن E_1 الحدث " المعنى تدخل في الأسبوع الأول "

وعنه : $P_1 = P(E_1) = 1$.

* إذا تدخل التقني في الأسبوع n فإن احتمال التدخل في الأسبوع $(n+1)$

هو $\frac{3}{4}$ ، يعني أن : $P(E_{n+1}/E_n) = \frac{3}{4}$ (احتمال الشرطي)

* إذا لم يتدخل التقني في الأسبوع n فإن احتمال التدخل في الأسبوع $(n+1)$

هو $\frac{1}{10}$ ، يعني أن : $P(E_{n+1}/\bar{E}_n) = \frac{1}{10}$ (احتمال الشرطي)

حدث \bar{E}_n الحدث المعاكس لـ E_n أي " التقني لم يتدخل في الأسبوع n .

(2) نعلم أن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ صيغة الاحتمالات المركبة

فإن : $P(E_{n+1} \cap E_n) = P(E_n) \cdot P(E_{n+1}/E_n)$

وسأب : $\left\{ \begin{array}{l} P(E_{n+1} | E_n) = \frac{3}{4} \\ P_n = P(E_n) \end{array} \right.$ ، بأن $P(E_{n+1} | E_n) = \frac{3}{4} P_n$

ولدينا : $P(E_{n+1} | \bar{E}_n) = P(\bar{E}_n) \times P(E_{n+1} | \bar{E}_n)$

سأفان : $\left\{ \begin{array}{l} P(E_{n+1} | \bar{E}_n) = \frac{1}{10} \\ P(\bar{E}_n) = 1 - P(E_n) = 1 - P_n \end{array} \right.$ ، بأن $P(E_{n+1} | \bar{E}_n) = \frac{1}{10} (1 - P_n)$

(3) لدينا : $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \bar{E}_n)$ ، $(E_{n+1} \cap E_n) \cap (E_{n+1} \cap \bar{E}_n) = \emptyset$ ، $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \bar{E}_n)$

لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1} \cap E_n) + P(E_{n+1} \cap \bar{E}_n)$ ، $P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1} \cap E_n) + P(E_{n+1} \cap \bar{E}_n)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $P(E_{n+1} \cap E_n) = \frac{3}{4} P_n$ ، $P(E_{n+1} \cap \bar{E}_n) = \frac{1}{10} (1 - P_n)$

سأب : $P_{n+1} = \frac{3}{4} P_n + \frac{1}{10} (1 - P_n)$

أي : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ، $P_{n+1} = \frac{13}{20} P_n + \frac{1}{10}$

(4) لدينا لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $P_{n+1} = \frac{13}{20} P_n + \frac{1}{10}$

نضع : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ، $q_n = P_n - \frac{2}{7}$

لدينا : $q_{n+1} = P_{n+1} - \frac{2}{7} = \frac{13}{20} P_n + \frac{1}{10} - \frac{2}{7}$

$q_{n+1} = \frac{13}{20} P_n - \frac{13}{20} = \frac{13}{20} (P_n - \frac{2}{7})$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $q_{n+1} = \frac{13}{20} q_n$

بأن : $(q_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{13}{20}$ ، $q_1 = \frac{5}{7}$ ، $q_1 = \frac{5}{7}$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $q_n = \frac{5}{7} \left(\frac{13}{20} \right)^{n-1}$

وبما أن : $q_n = P_n - \frac{2}{7}$ ، $P_n = q_n + \frac{2}{7}$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = \frac{5}{7} \left(\frac{13}{20} \right)^{n-1} + \frac{2}{7}$

(5) لتعدد n بحيث يكون لدينا : $P_n \leq \frac{3}{10}$

لدينا : $P_n \leq \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{5}{7} \left(\frac{13}{20} \right)^{n-1} + \frac{2}{7} \leq \frac{3}{10}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{13}{20} \right)^{n-1} \leq \frac{1}{50}$

$\Leftrightarrow P_n \left(\frac{13}{20} \right)^{n-1} \leq P_n \left(\frac{1}{50} \right)$

$\Leftrightarrow (n-1) P_n \left(\frac{13}{20} \right) \leq -P_n 50$

$$n \geq 1 + \frac{\ln 50}{\ln \frac{20}{13}} \approx 10,08 \text{ أي } n-1 \geq - \frac{\ln 50}{\ln \frac{13}{20}} \text{ إذن } n \geq 11$$

لأخذ إذن ، $n \geq 11$

20 نرمي ثلاثة نرد مكعبة ونرمق موشة ، وهو مقام رقعة من 1 إلى 6 .

نعبر الحدث A " الحصول على الأقل على الرقم 6 "

B " نودين على الأقل يعطون نفس الرقم "

(1) أ- أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

\bar{A} و \bar{B} و A و B .

ب- أحسب احتمال الحدث $\bar{A} \cap \bar{B}$.

(2) أ- علم أن $\bar{A} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ ، اسسح من السؤال (1)

احتمال الحدث $\bar{A} \cap B$.

(3) بطريقة مماثلة أحسب احتمال الحدث $A \cap B$. مل

الحدث A و B مستقلة ؟

الحواب :



ليكن n كوكب المكاسات لدينا $\text{card } \Omega = 6^3 = 216$

(1) A " الحصول على الأقل على الرقم 6 "

\bar{A} " عدم الحصول على الرقم 6 "

$$\text{card } \bar{A} = 5^3 \text{ إذن } p(\bar{A}) = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$$

B " نودين على الأقل يعطون نفس الرقم "

\bar{B} " النرد الثلاثة يعطي أرقام مختلفة " متى ، متى

$$\text{لدينا } \text{card } \bar{B} = A_6^3 = 120 \text{ إذن } p(\bar{B}) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

$$\text{بما أن } p(A) = 1 - p(\bar{A}) \text{ فإن } p(A) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

وَمَا لَنْ : $p(B) = 1 - p(\bar{B})$ فإن $p(B) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

ب - لدينا : $\bar{A} \cap \bar{B}$ الحدث "الأرقام مختلفة مثنى مثنى" ، لا تأخذ على الرقم 6

لدينا $\text{card}(\bar{A} \cap \bar{B}) = A_5 = 60$ ، و $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{60}{216} = \frac{5}{18}$

(2) مثال : $\bar{A} = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$; $(\bar{A} \cap B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = \emptyset$

فإن : $p(\bar{A}) = p(\bar{A} \cap B) + p(\bar{A} \cap \bar{B})$

ومنه : $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) - p(\bar{A} \cap \bar{B})$

$p(\bar{A} \cap B) = \frac{125}{216} - \frac{5}{18}$

أي : $p(\bar{A} \cap B) = \frac{65}{216}$

(3) بالمثل لدينا : $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$; $(B \cap A) \cap (B \cap \bar{A}) = \emptyset$

و $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$

ومنه : $p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(B \cap A)$

$p(B \cap \bar{A}) = \frac{4}{9} - \frac{65}{216}$

أي : $p(B \cap \bar{A}) = \frac{31}{216}$

لدينا $p(A) \times p(B) = \frac{91}{216} \times \frac{4}{9} = \frac{91}{486}$

إذا : $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$

ومنه الحدثان A و B غير مستقلان .

21 صيد و 7 لا يحتوي على كوكب منها و 1 مع كوكب هو داء
تسحب السماعة و 1 كوكب من السماعة و ($n \geq 2$) (نفس الشيء)
نفس الشيء مع جميع الكواكب باللعبة

لدينا P_n احتمال حصول على كوكب : ببساطة للامثلة التالية في السعة n .

(1) نفس الحالات الخاصة : $n=2$ ، $n=3$ ، $n=4$

أحسب الاحتمالات : P_2 : P_3 : P_4 .

(2) أحسب احتمال كل من الاحتمالات التالية :

" الحصول على كرة صفراء بالوسط خلال $(n-1)$ سحب أول E_n .

" الحصول على كرة صفراء في السحبة n " E'_n .

واستخرج قيمة P_n بدلالة n .

(3) نضع : $S_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n$ ($n \geq 1$)

أ- اعط تعبير مبسط لـ S_n بدلالة n

(يمكنك استعمال الصيغة : $\frac{(n-1)x^2 - nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$)

ب- بين أن لكل $n \geq 1$: $S_n \leq 1$ وأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$

2 (B) 4 (N)

U

الجواب : (1) حساب P_2 : P_3 : P_4

احتمال سحب كرة بيضاء من الصندوق U

$$p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

واحتمال سحب كرة سوداء من الصندوق U هو $p(N) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$P_2 = P(\{B\}) = p(B) = p(B) = \frac{1}{3}$$

$$P_3 = P(\{BNB, NBB\}) = 2(p(B))^2 p(N) = \frac{4}{27}$$

$$P_4 = P(\{BNNB, NBNB, NNBB\})$$

$$P_4 = 3(p(B))^2 (p(N))^2$$

(2) حساب P_n

لدينا الحدث E_n " الحصول على كرة صفراء بالوسط خلال $(n-1)$ سحب أول "

$$p(E_n) = C_{n-2}^2 p(B) (p(N))^{n-2}$$

$$p(E_n) = (n-2) \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

الحدث : E'_n : " سحب كرة بيضاء في السحبة n "

$$p(E'_n) = p(B) = \frac{1}{3}$$

لدينا $E_n \cap E'_n$ " حصول على كرة بيضاء للمرة السابقة في السحبة n "

$$P_n = P(E_n \cap E'_n)$$

بما أن الحدثين E_n و E_n' مستقلان فإن : $P_n = P(E_n) \times P(E_n')$

ومن هنا : $\forall n \geq 2 : P_n = \frac{n-1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

(3) أ- حساب S_n :

لدينا ،
$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=2}^n P_k &= \frac{1}{9} \sum_{k=2}^n (k-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{9} = \frac{(n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^n - n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} \quad \text{حسب المتسلسلة (1)} \\ &= n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{2}{3} - 1\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \end{aligned}$$

وبالتالي : $S_n = -\frac{n}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$

سأل : $\forall n \geq 2 \quad S_n \leq 1 \quad \text{و} \quad -\frac{n}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0$

لنثبت أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$ ، لدينا : $S_n = -\frac{n}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$

بما أن : $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

لنثبت إذن أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

نضع : $u_n = n \left(\frac{2}{3}\right)^n$

لذا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln n + n \ln \left(\frac{2}{3}\right))$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \left(\frac{\ln n}{n} + \ln \left(\frac{2}{3}\right) \right) \right] = -\infty$

أي : $\ln \left(\frac{2}{3}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

ومن هنا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(u_n)} = 0$

وبالتالي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$

22

بحسب عدد مراته على مائة كره مرفعة من 1 إلى 100

نستعمل عشوائياً 3 أو 4 واحد بحد كرات مع الصدوق.

(1) أحيب P_0 احتمال الحصول على أعداد ليست مربعاً كاملاً.ب - أحيب P' احتمال الحصول على الأقل على عدد مربع كامل.(2) أحيب P_n احتمال الحصول بالصيغة على عدد مربعاً كاملاً $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ (3) خارج العددين P' و $P_0 + P_2 + P_3$ وأحيب $P_0 + P_2 + P_3 + P_4$

الجواب: من بين مائة عدد من 1 إلى 100 لدينا عشرة أعداد مربعاً

كاملاً وهي: $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 10^2$ (1) لنكن A كون الإمكانات لدينا $\text{Card } A = C_{100}^3 = \frac{100 \times 99 \times 98}{6}$ أ لنكن A العدد "الحصول على أعداد ليست مربعاً كاملاً"لدينا $\text{Card } A = C_{90}^3 = \frac{90 \times 89 \times 88}{6}$ إذن $P_0 = P(A) = \frac{90 \times 89 \times 88}{100 \times 99 \times 98} = \frac{278}{245}$ ب - لنكن B العدد "الحصول على الأقل على عدد مربع كامل"لدينا: $B = \bar{A}$ ومنه: $P' = P(B) = 1 - P(A)$ أي: $P' = \frac{67}{245}$ (2) لنكن A_n العدد "الحصول بالصيغة على عدد مربعاً كاملاً"لدينا: $\text{Card } A_n = C_{10}^1 C_{90}^2$ إذن: $P_1 = \frac{C_{10}^1 C_{90}^2}{C_{100}^3} = \frac{267}{1078}$ $P_2 = \frac{C_{10}^2 C_{90}^1}{C_{100}^3} = \frac{27}{1078}$ $P_3 = \frac{C_{10}^3}{C_{100}^3} = \frac{2}{1695}$ (3) لمعاري العددين P' و $P_1 + P_2 + P_3$

$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{267}{1078} + \frac{27}{1078} + \frac{2}{2695}$$

$$= \frac{294}{1078} + \frac{2}{2695}$$

$$= \frac{147}{539} + \frac{2}{2695} = \frac{737}{2695}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{67}{245} \quad \text{إذن :}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = P' \quad \text{وفيه :}$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = P_0 + P' \quad \text{إذن :}$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1 \quad \text{فإن} \quad P_0 + P' = 1 \quad \text{بما أن}$$

23 نحوي كيس على خمس بندقيات حمراء مرقمة من 1 إلى 5

وعلى 4 بندقيات حمراء مرقمة من 1 إلى 4 .

نسحب عشوائياً من آن واحد 3 بندقيات من الكيس

(1) أحسب احتمال الأحداث التالية :

أ₁ : " الحصول على 3 بندقيات حمراء " .

ب₁ : " الحصول على 3 بندقيات حمراء " .

ج₁ : " الحصول على 3 بندقيات لها نفس اللون " .

د₁ : " الحصول على الأكثر بندقيتين حمراوين " .

(2) أحسب احتمال الأحداث التالية :

أ₂ : " الحصول على البندق الحمراء العاملة للرمم 1 " .

ب₂ : " الحصول على البندق الحمراء العاملة للرمم 1 " .

ج₂ : " الحصول على البندق الحمراء العاملة للرمم 1 والبندق الحمراء العاملة

للرمم 1 " .

د₂ : " الحصول على بندق واحد يعمل للرمم 1 " .

هـ₂ : " الحصول على بندقيات تعمل أرقام فردية ولها نفس اللون " .

V_2, V_4	R_2, R_4
V_2, V_5	R_2
V_3	R_3

الجواب: ليكن تكون الاحتمالات

$$\text{Total } n = C_9^3 = 84$$

لدينا:

$$\{V, V, V\} \rightarrow P(A_1) = \frac{C_3^3}{84} = \frac{1}{28}$$

$$\{R, R, R\} \rightarrow P(B_1) = \frac{C_3^3}{84} = \frac{1}{28}$$

$$\{V, V, V\} \text{ و } \{R, R, R\} \rightarrow P(C_1) = \frac{C_3^3 + C_3^3}{84} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$

$$\{R, R, V\} \text{ و } \{R, V, V\} \text{ و } \{V, V, V\} \rightarrow P(D_1) = \frac{C_3^2 C_1^1 + C_3^1 C_2^2 + C_3^3}{84} = \frac{20}{21}$$

$$\{V_2, V_2, V_2\} \rightarrow P(A_2) = \frac{C_2^1 C_2^2}{84} = \frac{28}{84} = \frac{1}{3}$$

(2)

$$\{R_2, R_2, R_2\} \rightarrow P(B_2) = \frac{C_2^1 C_2^2}{84} = \frac{1}{3}$$

$$\{R_2, V_2, X\} \rightarrow P(C_2) = \frac{C_2^1 C_2^1 C_1^1}{84} = \frac{7}{84} = \frac{1}{12}$$

$$\{2, 2, 2\} \rightarrow P(D_2) = \frac{C_2^1 C_2^2}{84} = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}$$

$$\{V_2, V_2, V_2\} \rightarrow P(E_2) = \frac{C_3^3}{84} = \frac{1}{84}$$

24 لدينا صناديق A و B و C بحيث:

الصندوق A يحتوي على 3 كرات حمراء و 5 كرات سوداء

الصندوق B يحتوي على 2 كرة سوداء و 3 كرات حمراء و 1 كرة سوداء

الصندوق C يحتوي على 2 كرات سوداء و 3 كرات حمراء و 1 كرة سوداء

نحضر عشوائياً صندوقاً ثم نخرج منه كرة

إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما هو الاحتمال أن يكون من صندوق A ؟

كرات الصندوق A ؟

3(R) 5(N)

(A)

2(R) 1(N)

(B)

2(R) 3(N)

(C)

الجواب

بعض الأحداث التالية: A "اختيار الصندوق A"

B "اختيار الصندوق B"

C "اختيار الصندوق C"

D "الكرة المسحوبة حمراء"

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} \quad \text{المطلوب هو حساب :}$$

$$P(A/D) = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} \quad \text{بما أن : } P(A \cap D) = P(A)P(D/A)$$

$$P(D/A) = \frac{3}{8} \quad \text{و بما أن : } P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

$$D = (D \cap A) \cup (D \cap \bar{A}) \quad ; \quad (D \cap A) \cap (D \cap \bar{A}) = \emptyset$$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap \bar{A})$$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap (B \cup C)) \quad (\bar{A} = B \cup C)$$

$$P(D) = P(D \cap A) + P((D \cap B) \cup (D \cap C))$$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) \quad ((D \cap B) \cap (D \cap C) = \emptyset)$$

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)$$

$$P(D) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{173}{360}$$

$$P(A/D) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{173}{360}} = \frac{135}{173} \quad \text{وبالتالي :}$$

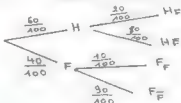
- 25** من بين مجتمع مكون من 60% من الرجال و 40% من النساء تعلم أن 20% من الرجال و 10% من النساء يتكلمون اللغة الفرنسية احبر ما عضو أو شيئاً سحبتاً من هذا المجتمع . ماهو الاحتمال لكون هذا الشخص :
- (1) رجلاً و يتكلم الفرنسية ؟
 - (2) رجلاً و لا يتكلم الفرنسية ؟
 - (3) امرأة و لا يتكلم الفرنسية ؟
 - (4) امرأة و علمائاً المحرم يتكلم الفرنسية ؟

الحواش : نوهزل H_F الحدث "رجل يتكلم الفرنسية"

$H_{\bar{F}}$ الحدث "رجل لا يتكلم الفرنسية"

F_F الحدث : "امرأة تتكلم الفرنسية"

$F_{\bar{F}}$ الحدث : "امرأة لا تتكلم الفرنسية"



$$P(HF) = \frac{60}{100} \times \frac{30}{100} = 0,12 \quad (1)$$

$$P(HF) = \frac{60}{100} \times \frac{80}{100} = 0,48 \quad (2)$$

$$P(FF) = \frac{40}{100} \times \frac{30}{100} = 0,12 \quad (3)$$

٤. المطلوب حساب $P(F/A)$

حيث: A : حدث "الشخص يتكلم الفرنسية"

$$P(F/A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{P(FF)}{P(A)} \quad \text{لأنه}$$

$$P(A) = P(HF) + P(FF) \quad \text{و} \quad P(FF) = \frac{40}{100} \times \frac{10}{100}$$

$$P(A) = 0,12 + 0,40 = 0,52 \quad \text{و} \quad P(FF) = 0,40$$

$$P(F/A) = \frac{0,40}{0,52} = \frac{10}{13} \quad \text{وهو}$$

26 لكن عددًا أصغرًا طبيعيًا غير معدوم وروحي

يعبر صمد وفا n يصفون على n كرة. البيضاء و n كرة سوداء

يحب n كرة من الصندوق وبالساعة حصة إذا كانت الكرة المستوية
 "فأرابعها إلى الصندوق وإذا كانت سوداء نعيد لها إلى الصندوق"

١. ما هو احتمال الحصول على كرة واحدة بيضاء؟

٢. ما هو الاحتمال أن يكون صمد الكرات المستوية الأولى لوفا أسف؟

٣. لكن ما n ما هو احتمال الحصول بالخط على n كرة بيضاء

في السحب الأولى؟

٤. يعبر صمد أن الكرات البيضاء والكرات السوداء مرفعة من 1 إلى n

يحب بالساعة ويدون إحداث كرت من الصندوق ما هو الاحتمال

أن يكون مجموع الرصيف المحصل عليهما مساوي n ؟

$$\begin{matrix} n \text{ (B)} \\ n \text{ (H)} \end{matrix}$$

U

أجواب (2) ١- الحدث A "الحصول على كرة واحدة بيضاء"

الكرة البيضاء يمكن أن تظهر في السعة 1 أو 2 أو n أو

يعبر الحدث A_n "الكرة البيضاء تظهر فقط في السعة n " $1 \leq n \leq n$

$$A_n = \frac{NN \dots NB}{1-2} \quad \frac{NB \dots NN}{n-1}$$

$$P(A_i) = \frac{n^{i-2}}{(2n)^{i-1}} \times \frac{\binom{1}{2n}}{\binom{1}{2n}} \times \frac{n^{i-1}}{(2n-2)^{i-1}} \quad \text{لنبدأ :}$$

$$P(A_i) = \frac{n^{i-2} \times n}{(2n)^{i-1} \times (2n-2)^{i-1}} = \left(\frac{n}{2n-2}\right)^{i-1} \times \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{i-1}$$

$$j \neq k \quad A_j \cap A_k = \emptyset \quad ; \quad A = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{وبما أن :}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad \text{فإن :} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{n}{2n-2}\right)^{i-1} \times \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{i-1} \\ &= \left(\frac{n}{2n-2}\right)^n \times \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n \times \frac{1 - \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n}{1 - \left(\frac{2n-1}{2n}\right)} \end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{2n-1}{2(1-n)} \times \left[\left(\frac{n}{2n-2}\right)^n - 1 \right] \quad \text{ومنه :}$$

ب - الحدث "B" الحصول على نصف الكرات المستعملة الأولى لوناً أبيضاً

$$B \quad \underbrace{BB \dots B}_{n/2} \underbrace{NN \dots N}_{n/2}$$

$$(نصف : nosp) \quad P(B) = \frac{A_n^{n/2}}{A_{2n}^{n/2}} \times \frac{n^{n/2}}{\left(\frac{2n}{2}\right)^{n/2}} = \frac{(2p)! (2p)!}{p! (4p)!} \times \left(\frac{2}{3}\right)^p$$

ج - الحدث "C" الحصول بالنظم على k كرات بيضاء و السمتان الأولى

$$C : \underbrace{BB \dots B}_k \underbrace{NN \dots N}_{(n-k)}$$

$$P(C) = \frac{A_n^k}{A_{2n}^k} \times \frac{n^{n-k}}{(2n-k)^{n-k}} = \frac{n! (2n-k)!}{(2n)! (n-k)!} \times \left(\frac{n}{2n-k}\right)^{n-k}$$

د - الحدث "D" الحصول على رتبتين مجموعتهما يساوي n

$$D : (k; n-k) \quad / \quad 1 \leq k \leq n$$

الكرات البيضاء B : 1 ; 2 ; ... ; $\frac{n}{2}$; ... ; $n-1$

الكرات السوداء N : 1 ; 2 ; ... ; $\frac{n}{2}$; ... ; $n-1$

$$P(D) = \frac{(n-2)C_2\left(\frac{1}{2} + C_2\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{A_{2n}^{1/2}} = \frac{2(2n-1)(2n-2)!}{(2n)!}$$

27 الوصول إلى الثانوية: تلميذ له الاختيار على أربع مسارات a و b و c و d

- احتمال اختيار التلميذ المسار a هو $\frac{3}{30}$.
- وا احتمال اختيار التلميذ المسار b هو $\frac{1}{10}$.
- احتمال اختيار التلميذ المسار c هو $\frac{1}{5}$.

- وا احتمال وصول التلميذ متأخرًا عند اختيار المسار a هو $\frac{1}{20}$.
- احتمال وصول التلميذ متأخرًا عند اختيار المسار b هو $\frac{1}{10}$.
- وا احتمال وصول التلميذ متأخرًا عند اختيار المسار c هو $\frac{1}{5}$.
- وعند اختيار التلميذ المسار d يصل متأخرًا.

نعتبر الأحداث التالية:

- "A" التلميذ اختار المسار a
- "B" التلميذ اختار المسار b
- "C" التلميذ اختار المسار c
- "D" التلميذ اختار المسار d
- "R" التلميذ وصل متأخرًا

(1) أحسب احتمال الحدث R : $P(R)$

(2) ليكن E الحدث "التلميذ وصل متأخرًا" واختار المسار a

حيث: $E = \{a, b, c, d\}$

أ- اكتب كلاً من E_a و E_b و E_c بدلالة A, B, C, D .

ب- أحسب احتمال الحدث E_a : $P(E_a)$

ج- حدد $P(E_c)$ و $P(E_d)$.

(3) حدد احتمال الحدث R : $P(R)$

(4) التلميذ وصل متأخرًا، ما هو الاحتمال اختيار المسار c ؟

الجواب: (1) ليكن R كونه الاحتمالات.

لدينا: $\{A, B, C, D\}$ تجزئة للكون Ω .

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$$

ومنه:

$$P(C) = \frac{1}{12} \quad ; \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad ; \quad P(A) = \frac{1}{3}$$

$$p(D) = 1 - [p(A) + p(B) + p(C)] = \frac{1}{3} \quad \text{بما أن :}$$

$$E_A = R \cap A \quad ; \quad E_B = R \cap B \quad ; \quad E_C = R \cap C \quad ; \quad E_D = R \cap D \quad \text{لدينا :}$$

$$p(E_A) = p(R \cap A) = p(A) p(R/A) \quad \text{ب - لدينا :}$$

$$p(R/A) = \frac{1}{20} \quad ; \quad p(A) = \frac{1}{3}$$

$$p(E_A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{60} \quad \text{نلاحظ :}$$

$$p(E_B) = p(B) p(R/B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{40} \quad \text{ج - لدينا :}$$

$$p(E_C) = p(C) p(R/C) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{60}$$

$$(R \cap D = \emptyset) \quad p(E_D) = p(D) p(R/D) = p(R \cap D) = 0$$

$$E_A \cap E_B = \emptyset \quad ; \quad R = \bigcup_{i=1}^4 E_i \quad \text{بما أن :}$$

$$p(R) = p(E_A) + p(E_B) + p(E_C) \quad \text{فإن :}$$

$$p(R) = \frac{1}{60} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} = \frac{7}{120}$$

$$p(C|R) \quad \text{(4) المطلوب هو حساب :}$$

$$p(C|R) = \frac{p(C \cap R)}{p(R)} = \frac{p(E_C)}{p(R)} \quad \text{لدينا :}$$

$$p(C|R) = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{7}{120}} = \frac{2}{7} \quad \text{ومنه :}$$

28 مغسرين سدوتين A و B بحيث . الهندوق A يحتوي على 6 كرات

بنيضاء و 4 كرات سوداء ، والهندوق B يحتوي على 10 كرات بنيضاء

و 5 كرات سوداء . (نعرض فيمكن التمييز بين جميع الكرات باللمس)

سحب عشوائياً هندوقاً من بين الهندوقين A و B ثم سحب من هذا

الهندوق عشوائياً كرة ثم نعيد لها في نفس الهندوق .

إذا كانت الكرة المستحبة بنيضاء بعد السحب من نفس الهندوق /

وراء كانت الكرة المستحبة سوداء سحب كرة من الهندوق الآخر

نعتبر الحدث E_n "في السجعة n : سحب من الصندوق A"

فمجموع P_n لاحتمال الحدث E_n أي : $P_n = P(E_n)$

(1) أحسب : P_2

(2) أ- أحسب احسب احتمال العد E_2 علماً أن E_1 أي : $P(E_2|E_1)$

ب- أحسب $P(E_2|\bar{E}_1)$

ج- استصح $P(E_2 \cap E_1)$ و $P(E_2 \cap \bar{E}_1)$ ثم P_2

(3) أ- أحسب $P(E_{n+2}|E_n)$ و $P(E_{n+2}|\bar{E}_n)$

ب- استصح $P(E_{n+2} \cap E_n)$ و $P(E_{n+2} \cap \bar{E}_n)$ بدلالة P_n

(4) حدد الأعداد الحقيقية a و b بحيث : $P_{n+2} = aP_n + b$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

الجواب : (1) لنسأ احتمال سحب الصندوق A هو $P_2 = P(E_2) = \frac{1}{2}$



(A)



(B)

(2)

أ- الحدث $E_2|E_1$ متفق إذا كانت الكرة المسحوبة من A في السجعة الأولى

$$P(E_2|E_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{يبقى 6 : إذن}$$

ب- الحدث $E_2|\bar{E}_1$ متفق إذا كانت الكرة المسحوبة من B في السجعة الأولى

$$P(E_2|\bar{E}_1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad \text{سوداد 5 : إذن}$$

$$P(E_2 \cap E_1) = P(E_1) \times P(E_2|E_1) \quad \text{ج- ليس}$$

$$P(E_2 \cap E_1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$P(E_2 \cap \bar{E}_1) = P(\bar{E}_1) \times P(E_2|\bar{E}_1)$$

3

$$P(E_2 \cap \bar{E}_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$(E_2 \cap E_1) \cap (E_2 \cap \bar{E}_1) = \emptyset \quad ; \quad E_2 = (E_2 \cap \bar{E}_1) \cup (E_2 \cap E_1) \quad \text{بما أن}$$

$$P_2 = P(E_2) = P(E_2 \cap E_1) + P(E_2 \cap \bar{E}_1) \quad \text{فإن}$$

$$P_2 = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{14}{30}$$

$$P_2 = \frac{7}{15} \quad \text{ومنه}$$

(3) أبتعدان الكرات تعادلياً أما أيضاً فليكن :

$$p(E_{n+2} | E_n) = p(E_2 | E_1) = \frac{3}{5}$$

$$p(E_{n+2} | \bar{E}_n) = p(E_2 | \bar{E}_1) = \frac{1}{3}$$

ب- لدينا : $P(E_{n+2} \cap E_n) = P(E_{n+2} | E_n) \cdot P(E_n)$

$$p(E_{n+2} | E_n) = \frac{3}{5} \quad \text{و} \quad P(E_n) = P_n$$

$$P(E_{n+2} \cap E_n) = \frac{3}{5} P_n \quad \text{فيكون :}$$

$$P(E_{n+2} \cap \bar{E}_n) = P(E_{n+2} | \bar{E}_n) P(\bar{E}_n) \quad \text{ولدينا :}$$

$$p(E_{n+2} | \bar{E}_n) = \frac{1}{3} (1 - P_n)$$

$$\begin{cases} E_{n+2} = (E_{n+2} \cap E_n) \cup (E_{n+2} \cap \bar{E}_n) \\ (E_{n+2} \cap E_n) \cap (E_{n+2} \cap \bar{E}_n) = \emptyset \end{cases} \quad \text{وبما أن :}$$

$$P(E_{n+2}) = P(E_{n+2} \cap E_n) + P(E_{n+2} \cap \bar{E}_n) \quad \text{فيكون :}$$

$$P_{n+2} = \frac{3}{5} P_n + \frac{1}{3} (1 - P_n) \quad \text{ومن هنا :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : P_{n+2} = \frac{4}{15} P_n + \frac{1}{3} \quad \text{وبالمثل :}$$

$$b = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad a = \frac{4}{15} \quad \text{ومن هنا :}$$

29

(مسابرة مكعبة) (وحده مربعة من الأولى 6) ثلاث مرات

مساوية برمر a سعة الرمية الأولى و b للساحة و c للساحة

$$x \in \mathbb{R} \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{بمعبر المعادلة}$$

ما هو الاحتمال لكي يكون لهذه المعادلة حل مزدوج ؟

الجواب

ليكن تكون المتكاسات هي مجموعة المتكاسات (a, b, c)

يجب أن a و b و c من $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\text{إذن } \Omega = 6^3 = 216$$

المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ قبل حل مزدوج إذا وفقط إذا كان

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \quad \text{أي :} \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 = ac$$

لأن b عدد زوجي ومنه : $b \in \{2, 4, 6\}$

* إذا كان $b=2$ فإن: $ac=1$ ومنه: $a=1$ و $c=1$

$$(a,b,c) = (1,2,1) \quad \text{ومنه:}$$

* إذا كان $b=4$ فإن: $ac=4$ ومنه:

$$(c=4 \text{ و } a=1) \text{ أو } (c=1 \text{ و } a=4) \text{ أو } (c=2 \text{ و } a=2)$$

$$(a,b,c) \in \{(1,2,4); (4,2,1); (2,2,2)\} \quad \text{ومنه:}$$

* إذا كان $b=6$ فإن: $ac=9$ ومنه $a=3$ و $c=3$

$$(a,b,c) = (3,6,3) \quad \text{ومنه:}$$

العدد "A" المعادلة $ax^2+bx+c=0$ نحل حل مزوج في \mathbb{R}

$$\text{Card } A = 5$$

$$p(A) = \frac{5}{246} \quad \text{وبالتالي:}$$

30 نفكر المجموعة $\mathcal{A} = \{1, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

ليكن d مجموعة مضاعفات d في \mathcal{A} فمصرح أن $d|n$ وليكن p احتمال على \mathcal{A} .

(1) حدد $p(\mathcal{A}d)$

(2) ليكن d_1 و d_2 و d_3 ... d_r هو اسم أولية لـ n ومجموعة في \mathcal{A}

يسر أن الأحاديث $\mathcal{A}d_1, \mathcal{A}d_2, \dots, \mathcal{A}d_r$ و $\mathcal{A}d_r$ متصلة في \mathcal{A} .

(3) نضع: $K_n = \{m \in \mathcal{A} \mid m \wedge n = 1\}$

$$p(K_n) = (1 - \frac{1}{d_1})(1 - \frac{1}{d_2}) \dots (1 - \frac{1}{d_r})$$

ب- اتمح

(الاجاب: 2) لما أن $d|n$ فإن $n = qd$ حيث $q \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{A}d = \{d, 2d, \dots, qd\} \quad \text{و}$$

$$\text{Card } \mathcal{A}d = q = \frac{n}{d} \quad \text{ومنه}$$

$$p(\mathcal{A}d) = \frac{\text{Card } \mathcal{A}d}{\text{Card } \mathcal{A}} = \frac{1}{d} \quad \text{و}$$

$$\begin{cases} d \wedge n = 1 \\ d|n \end{cases} \Rightarrow d \in K_n \quad \text{(2) لذا}$$

$$p(A_1 A_2) = \frac{1}{d_1 d_2} = \frac{1}{d_1} \times \frac{1}{d_2} \quad \text{لاحظ:}$$

$$p(A_1 A_2 A_3) = p(A_1 A_2) = p(A_1) \times p(A_2) \quad \text{ومنه}$$

وبالتالي: الأحداث $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ مستقلة متتالية، متى

$$x \notin K_n \quad \Leftrightarrow \quad x \in A_i \quad \text{لاحظ:} \quad x \in K_n \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A_i$$

ومنه x و n غير أوليا n مما يستلزم: إذا n قبل على الأقل ناسماً

من بين الأعداد الصحيحة d_1, d_2, \dots, d_n

$$A_i \cap A_j \quad (i \neq j) \quad \text{و} \quad K_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad \text{لاحظ:}$$

$$K_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$K_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

وبما أن الأحداث A_1, A_2, \dots, A_n مستقلة متتالية، متى

$$p(K_n) = p(A_1) \times p(A_2) \times \dots \times p(A_n) \quad \text{فإن:}$$

$$p(K_n) = \left(1 - \frac{1}{d_1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{d_2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{d_n}\right) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{d_i}\right)$$

www.66ghz.com

$$p(K_n) = \frac{\text{card } K_n}{\text{card } \Omega} = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{d_i}\right) \quad \text{ب- لذا:}$$

$$\text{card } K_n = n \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{d_i}\right) \quad \text{ومنه}$$



تمارين للبحث

1 يحوي صندوق ثلاث كرات مرقمة على النحو التالي: كرة تحمل الرقم 1، كرة تحمل الرقم 2، و n كرة تحمل الرقم n . ($n \in \mathbb{N}^*$)
(أ) أحسب عدد الكرات .
(ب) نسحب عشوائياً كرة من الصندوق .

أ- نفرض أن n زوجاً . أحسب دالة احتمال سحب كرة تحمل رقماً زوجياً .
ب- نفرض أن عدد الكرات الموجود في الصندوق لا يساوي 28
ما هو احتمال سحب كرة تحمل رقماً أكبر قليلاً من 4 ؟

2 يحوي صندوق ثلاث كرات مرقمة من 1 إلى 8 . نسحب عشوائياً السابغ ودون إحلال 4 كرات من الصندوق . أحسب احتمالات الأحداث التالية :

- (أ) الكرة رقم 5 تظهر في السحب الأولى .
- (ب) الكرة رقم 5 تظهر في السحب الأولى ، الكرة رقم 6 تظهر في السحب الرابعة .
- (ج) الكرة رقم 4 تظهر في السحب رقم 1 ، الكرة رقم 4 تظهر في السحب رقم 2 .
- (د) كرة واحدة على الأقل تحمل رقماً زوجياً تظهر في السحب رقم 1 و 2 و 3 و 4 .

3 يحوي صندوقان 1 و 2 ، يحوي على 8 كرات من بينها 3 بيضاء و 5 سوداء و صندوقان 3 و 4 يحويان 4 كرات من بينها 3 بيضاء و 1 حمراء . نسحب عشوائياً صندوقاً من الصندوقين و نسحب منه كرة واحدة . الكرات لا يمكن التمييز بين
(أ) إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء ، ما هو احتمال سحبها من الصندوق 1 ؟
(ب) حدد حتماً يكون احتمال وقوعه يساوي $\frac{43}{16}$

4 يحوي صندوق ثلاث كرات مرقمة من 1 إلى 4 و 5 كرات سوداء مرقمة من 1 إلى 5 ، و 4 كرات حمراء مرقمة من 1 إلى 4 . نسحب عشوائياً ثلاث كرات من هذا الصندوق .

- (أ) ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون ؟
- (ب) ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل ؟
- (ج) ما هو احتمال الحصول على 3 أرقام متساوية ؟

2) ماهو احتمال الحصول على 3 أرغام، ووجهة علماء أن الكواب العسيرة به
مختلفة اللون فثنى ، ثنى ؟

5 بعسر $2n$ کره ($n \geq 3$) مع $2n-3$ کره لوهاسم و لات کره
لوهاسم د . بمع کل عدد الکرات ($2n$ کره) A

(٤) نُسحب ثَمَانِيًا كِرَاتٍ مِنَ الصَّنَدُوقِ أ.

١- ماهو احتمال ان يكون 'ر' على نفس اللون ؟

ب- ماهو احتفال صعب على الأقل كرة يمينها ؟

(2). أحد (n-2) كبرياء سفاهة، وكُنْ " واحد، سوداء من الهند وق. صحتها

في الهندوق B .

١- نشجع كافة واحدات العمل و A, B على ان يمددوا العمل و B

أخبرني الأستاذ p. أني قد سمعت الصلوة مرة واحدة في الصباح

ب - عدد الحملات السابقة + مراراً و مرة فرج الكرات المسعوبة
إلى صندوقها.

مجلس ۱۲۱۲ فی ۱۲ محرم ۱۳۱۲

Let α, β, γ be the angles of the triangle. Then

بسم الله الرحمن الرحيم

١٢٤ حسب احتمال الحصول على كره ، و . ، و . ، و . ، وفقاً لهذا التوزيع

[illegible]

(3) أحسن الأعمال الصالحات على 3 كرات أرفها فكل واحد منهن حسنة

أساسها 2=3 (بعد ترتيب مناسب)

جواب: صمد و علو n درجه $(n \geq 2)$ معروفه است 2 اما n

مستخرج من العهد وجميع البعثات بالسابع و ب و د ا ح ل ل و بقية
تتموه أدناه

(١) حدد رئيسي كون الحكانيات .

(2) يمكن A الحدوث " أو قام السيد فاب الممدوح في هي على النحو التالي

1, 2, ..., n. أحسب $p(A)$.

(د) ليكن $P(B)$ "رقم" المدفوعة "اللازمة" لـ $P(A)$ "المدفوعة" $P(B)$ "أخيراً"

(4) جتنی بگوں لایسا $P(A) = P(B)$

- 8** تم تلقيح ثلث سكان إحدى القرى ضد مرض الزكام لاحتمال الأطباء أنه في كل 15 مريضاً بالزكام هناك مريضان ملتقحان
- (1) هل يمكن اعتبار هذا التلقيح فعالاً ؟
- (2) أحسب احتمال إصابة شخص غير ملتقح بالمرض.

- 9** سمون عداء على معجاب (Paincourt) يتنوي على 4 حواجز موفقه من 1 إلى 4 بحيث أن احتمال إسقاط الحاجر الذي يعمل الزمن له هو $\frac{4}{2k}$ مع $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- يوصل العداء ملقح المعجاب إلى آخر حاجر مهما كان عدد التواجز المسقطه
- (1) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :
- A " لا يستقط المعجاء أي حاجز "
- B " سقط العداء الحاجر الأول والحاجر الرابع "
- C " يستقط العداء جميع الحواجز "
- (2) يربح العداء يعطى لكل حاجر غير مغلوب ويخسر فلتبين لكل حاجز مغلوب
- 1- أحسب الاحتمال P_1 لكي يربح العداء 8 نقط.
- بدأحسب الاحتمال P_2 لكي يربح العداء 4 نقط.

- 10** يعزى كس على 5 كرة. سماء و ط كرة سوداء. يستحب لاعبان بالوالى كرة واحدة من الكس. ويعتبر اللاعب رابحاً إذا كان أول سحب كرة يبيضا.
- (1) أ- ماهو احتمال ربح كل واحد منهما ؟
- ب- تليف عدد : $a=2$ و $b=8$
- (2) نرمي اللاعبان على التوالى برذا في الهواء مرمياً من 1 إلى 6.
- يعتبر اللاعب رابحاً إذا كان أول من حصل على الرقم 1.
- أ- ماهو احتمال ربح كل واحد منهما ؟
- ب- ماهو الاحتمال لكي ينتهي اللعب قبل 20 رميه.

11 ليكن S_n^p هو عدد التهيئات السمولية من مجموعة E رئيسها n

نعو مجموعة F رئيسها p ($p \leq n$)

(1) احسب S_n^p و S_n^p

(2) أثبت أن $\sum_{k=0}^p C_p^k S_n^k = p^n$

(3) تليف. بورع عشوائياً 5 كرات على 3 حجر
احسب الاحتمال لكي توجد كرة واحدة على الأقل في كل حجر

12 ليكن n عنصر من N^* . نضع $S = \{1, \dots, n\}$

نحسب عشوائياً جزءاً من المجموعة S ونفسر A جزء S لها

الاحتمال . ليكن A جزءاً من S بعنصر الأحداث التالية

E : "الجزء الذي اختير يوجد ضمن A "

F : "الجزء الذي اختير يوجد ضمن A "

G : "نالحق A والجزء الذي اختير هو المجموعة الفارغة"

(1) احسب احتمال الحدث E بدلالة n و $|A|$

(2) احسب احتمال الحدثين F و G

13 مجموع كل واحد من n صندوق V_1, V_2, \dots, V_n على a_k كرة بيضاء

و b_k كرة سوداء . يجب عشوائياً كرة من الصندوق V_1 ومجموعة a_1 الصندوق

V_2 ثم سحب عشوائياً كرة من الصندوق V_3 ومجموعة a_2 الصندوق V_4 ومجموعة a_3 الصندوق V_5

إلى أن نصل إلى سحب كرة من الصندوق V_n ومجموعة a_{n-1} الصندوق V_n

نرمز كرمز B_k من $\{1, 2, \dots, n\}$ بالحدث B_k "الكرة المسحوبة من الصندوق V_k هي بيضاء"

لكل k من $\{1, 2, \dots, n\}$ نضع $\mu_k = p(B_k)$

(1) احسب μ_k

(2) اثبت أنه مهما يكن k من $\{1, 2, \dots, n-1\}$

فإن $\mu_{k+1} = \frac{a_k}{a_k + b_k + 1} \mu_k + \frac{b_k}{a_k + b_k + 1}$

(3) استنتج $p(B_n)$

14

لك m و n مع $0 \leq n < m$ و $m+n$ عدد فردي
نعرف كسب n كرات بسواء حرفه مع 1 إلى n و $m+n$ كرة سوداء
حرفه مع 1 إلى $m+n$ برتبة كل عنصر من $\{1, \dots, m+n-1\}$ بالعدد A_k
نسحب عشوائياً وفي آن واحد كرتين من الكيس .
 A_k "الحصول رقمها k وكرتها رقمها k " $m+n-k$

(1) لكل k عنصر من $\{1, \dots, m+n-k\}$ و P_k احتمال الحدث A_k

$$P_k = \frac{4}{(2n+m)(2n+m-1)} \quad \text{أ- احسب } P_k \text{ لـ } k \leq n \text{ و } k > n$$

ب- احسب P_k إذا كان $n > k$.

ج- أسأل أن $A_{m+n-k} = A_k$ (أو k مع $\{1, \dots, m+n-1\}$)

(2) ليكن A الحدث "الحصول على كرتين من نفس اللون مع رقمهما $m+n$ "

أ- احسب احتمال الحدث A .

ب- احسب احتمال أن يكون الرقم الذي نحصل عليه من الكرتين هو العدد $m+n$.

بيّنا ونين .

15

نعتبر تسلسل غير متناهي a_1, a_2, a_3, \dots حيث $a_n \in \mathbb{R}$ لكل n

عشوائياً وفي آن واحد كرات من الكيس .

P_n احتمال أن يكون الرقم الذي نحصل عليه من الكرتين هو العدد n و P_n لـ $n \in \mathbb{N}$

(1) احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$

16

نعتبر تسلسل غير متناهي a_1, a_2, a_3, \dots حيث $a_n \in \mathbb{R}$ لكل n

لنفرض أن a_n و a_{n+1} يعطيان الرقم 1 و 2 على التوالي .

احسب احتمال أن يكون الرقم الذي نحصل عليه من الكرتين هو العدد 1 و 2 على التوالي .

احسب احتمال أن يكون الرقم الذي نحصل عليه من الكرتين هو العدد 1 و 2 على التوالي .

احسب احتمال أن يكون الرقم الذي نحصل عليه من الكرتين هو العدد 1 و 2 على التوالي .

احسب احتمال أن يكون الرقم الذي نحصل عليه من الكرتين هو العدد 1 و 2 على التوالي .

احسب احتمال أن يكون الرقم الذي نحصل عليه من الكرتين هو العدد 1 و 2 على التوالي .

(1) احسب احتمال العددين التاليين :

17A "الكراوات الملبسة المسحومة بحمل نفس اللون"

8 "ي مان وكريمان فقط حب الكراب الملا ب يحمل نفس اللون"

(2) $x(y+z)$ لا يساوي $x \cdot y + x \cdot z$ لأن x ليس عدداً

(3) لكل n من \mathbb{N} نرمز بـ A_n الحدث الحصول على :

$$P_i = P(A_i) \quad \bar{y} \quad x(y+z) = z$$

احسب p_n لكل n من 1 إلى 10 .

18 هم عائلته n طفلًا ($n \geq 2$) مخصص أن الذكر، والآخر

نفس الاحتمال انهما لهما والى هذه العائلة .

وہم منہ الیہ فی اللہ

A: "تتضمن هذه العائلة أولاد وبنات"

B: "تفهم هذه العائلة" على الأكثر ففقا "

c: "تخضع هذه العائلة على الأكثر فتن"

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(2) حدد قيمة n بحيث يكون الحدثان A و B مستقلان .

(3) حدد قيمة n بحيث يكون الحدان A و C مستقلان .

19

2. 11 10 3 10 4 10 11 10 12 10 13 10 14 10 15 10 16 10 17 10 18 10 19 10 20 10 21 10 22 10 23 10 24 10 25 10 26 10 27 10 28 10 29 10 30 10 31 10 32 10 33 10 34 10 35 10 36 10 37 10 38 10 39 10 40 10 41 10 42 10 43 10 44 10 45 10 46 10 47 10 48 10 49 10 50 10 51 10 52 10 53 10 54 10 55 10 56 10 57 10 58 10 59 10 60 10 61 10 62 10 63 10 64 10 65 10 66 10 67 10 68 10 69 10 70 10 71 10 72 10 73 10 74 10 75 10 76 10 77 10 78 10 79 10 80 10 81 10 82 10 83 10 84 10 85 10 86 10 87 10 88 10 89 10 90 10 91 10 92 10 93 10 94 10 95 10 96 10 97 10 98 10 99 10 100 10 101 10 102 10 103 10 104 10 105 10 106 10 107 10 108 10 109 10 110 10 111 10 112 10 113 10 114 10 115 10 116 10 117 10 118 10 119 10 120 10 121 10 122 10 123 10 124 10 125 10 126 10 127 10 128 10 129 10 130 10 131 10 132 10 133 10 134 10 135 10 136 10 137 10 138 10 139 10 140 10 141 10 142 10 143 10 144 10 145 10 146 10 147 10 148 10 149 10 150 10 151 10 152 10 153 10 154 10 155 10 156 10 157 10 158 10 159 10 160 10 161 10 162 10 163 10 164 10 165 10 166 10 167 10 168 10 169 10 170 10 171 10 172 10 173 10 174 10 175 10 176 10 177 10 178 10 179 10 180 10 181 10 182 10 183 10 184 10 185 10 186 10 187 10 188 10 189 10 190 10 191 10 192 10 193 10 194 10 195 10 196 10 197 10 198 10 199 10 200 10 201 10 202 10 203 10 204 10 205 10 206 10 207 10 208 10 209 10 210 10 211 10 212 10 213 10 214 10 215 10 216 10 217 10 218 10 219 10 220 10 221 10 222 10 223 10 224 10 225 10 226 10 227 10 228 10 229 10 230 10 231 10 232 10 233 10 234 10 235 10 236 10 237 10 238 10 239 10 240 10 241 10 242 10 243 10 244 10 245 10 246 10 247 10 248 10 249 10 250 10 251 10 252 10 253 10 254 10 255 10 256 10 257 10 258 10 259 10 260 10 261 10 262 10 263 10 264 10 265 10 266 10 267 10 268 10 269 10 270 10 271 10 272 10 273 10 274 10 275 10 276 10 277 10 278 10 279 10 280 10 281 10 282 10 283 10 284 10 285 10 286 10 287 10 288 10 289 10 290 10 291 10 292 10 293 10 294 10 295 10 296 10 297 10 298 10 299 10 300 10 301 10 302 10 303 10 304 10 305 10 306 10 307 10 308 10 309 10 310 10 311 10 312 10 313 10 314 10 315 10 316 10 317 10 318 10 319 10 320 10 321 10 322 10 323 10 324 10 325 10 326 10 327 10 328 10 329 10 330 10 331 10 332 10 333 10 334 10 335 10 336 10 337 10 338 10 339 10 340 10 341 10 342 10 343 10 344 10 345 10 346 10 347 10 348 10 349 10 350 10 351 10 352 10 353 10 354 10 355 10 356 10 357 10 358 10 359 10 360 10 361 10 362 10 363 10 364 10 365 10 366 10 367 10 368 10 369 10 370 10 371 10 372 10 373 10 374 10 375 10 376 10 377 10 378 10 379 10 380 10 381 10 382 10 383 10 384 10 385 10 386 10 387 10 388 10 389 10 390 10 391 10 392 10 393 10 394 10 395 10 396 10 397 10 398 10 399 10 400 10 401 10 402 10 403 10 404 10 405 10 406 10 407 10 408 10 409 10 410 10 411 10 412 10 413 10 414 10 415 10 416 10 417 10 418 10 419 10 420 10 421 10 422 10 423 10 424 10 425 10 426 10 427 10 428 10 429 10 430 10 431 10 432 10 433 10 434 10 435 10 436 10 437 10 438 10 439 10 440 10 441 10 442 10 443 10 444 10 445 10 446 10 447 10 448 10 449 10 450 10 451 10 452 10 453 10 454 10 455 10 456 10 457 10 458 10 459 10 460 10 461 10 462 10 463 10 464 10 465 10 466 10 467 10 468 10 469 10 470 10 471 10 472 10 473 10 474 10 475 10 476 10 477 10 478 10 479 10 480 10 481 10 482 10 483 10 484 10 485 10 486 10 487 10 488 10 489 10 490 10 491 10 492 10 493 10 494 10 495 10 496 10 497 10 498 10 499 10 500 10 501 10 502 10 503 10 504 10 505 10 506 10 507 10 508 10 509 10 510 10 511 10 512 10 513 10 514 10 515 10 516 10 517 10 518 10 519 10 520 10 521 10 522 10 523 10 524 10 525 10 526 10 527 10 528 10 529 10 530 10 531 10 532 10 533 10 534 10 535 10 536 10 537 10 538 10 539 10 540 10 541 10 542 10 543 10 544 10 545 10 546 10 547 10 548 10 549 10 550 10 551 10 552 10 553 10 554 10 555 10 556 10 557 10 558 10 559 10 560 10 561 10 562 10 563 10 564 10 565 10 566 10 567 10 568 10 569 10 570 10 571 10 572 10 573 10 574 10 575 10 576 10 577 10 578 10 579 10 580 10 581 10 582 10 583 10 584 10 585 10 586 10 587 10 588 10 589 10 590 10 591 10 592 10 593 10 594 10 595 10 596 10 597 10 598 10 599 10 600 10 601 10 602 10 603 10 604 10 605 10

20 دسمبر ۱۹۷۱ء کو لاہور میں منعقد ہونے والے جلسہ میں

علم سكر ... و ... و ... و ... و ... و ...

[illegible]

سہ ماہی و پکھلی، مچھلی، پرندے، کیڑے مکوڑے، لاکھڑے، گدھے، بیلے، اونٹ، کتے، بلیاں، مرغیاں، چرواہے،

[illegible]

فصل پنجم

ما هو احتمال أن نجد بعد هذه التجربة نفس النسبة التي كانت

في ١٢٠٠؟

نعبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $31, +\infty$ بما يلي :

21

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x + 1}$$

1- أدرج تغيرات الدالة f .

2- ليكن n من $\{1, 2, \dots, 10\}$. يتويى صندوق على n كرة بيضاء و $n+2$ كرة سوداء. ن سحب عشوائياً ونأخذ كرة بين من الصندوق.

ليكن $p(n)$ احتمال الحصول على كرة لهما نفس اللون.

أ- بين أن : $p(n) = f(n)$

ب- بين أن : $p(n) < \frac{1}{2}$

ج- ما هي قيمة n لكي تكون $p(n)$ دنوية ؟

د- حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n)$.

22 1- ليكن A, B حدثين غير معدوم و p احتمال على الكون

$$p_A(B) = \frac{p(B) \times p_B(A)}{p(B) \times p_B(A) + p(\bar{B}) \times p_B(A)}$$

من أن

2- في قسم للتأليف علوم رياضية نجد 30 تلميذ من بينهم 10 تلميذ

متقنين و 20 تلميذ متوسطين

احتمال تلميذ متوسط أن يعمل على تأليف جديد = 0,75 و الرابضيات هي 0,70

احتمال تلميذ متوسط أن يعمل على تأليف جديد = 0,45 و الرابضيات هي 0,40

أ- ورنه من الأرواء عشوائياً بعد طرحهما ووجدنا جديد

أ- ما هو الاحتمال P_2 لأن يكون التلميذ متوسط ؟

ب- ما هو الاحتمال P_2 لأن تكون لتلميذ متوسط ؟

23 ليكن n عدداً فردياً بحيث : $n \geq 3$.

23

يتويى كيس على n كرة « سماء مرقعة » و 1 إلى n و على $(n+1)$

كرة سوداء مرقعة من 1 إلى $(n+1)$ ن سحب عشوائياً و نأخذ واحد

كر من أحسن احتمالات الأعداد

A : " الحصول على كرتين من نفس اللون "

B : " الحصول على كرتين لهما نفس الرقم "

C : " الحصول على كرتين تكون مجموع رقميهما عدد زوجي "

24 دومي نود " عدة مرات متتالية " برمز P_n احتمال حصول الحدث .
 " الوجه رقم 1 يظهر للمرة الأولى في الرمية " n

(1) أحسب P_2 و P_3

(2) حدد P_n بدلالة n .

(3) ليكن S_n احتمال حصول الحدث " الوجه رقم 1 يظهر على الأقل مرة عند الرميات n الأولى " .

أ- أحسب S_n .

ب- حدد n_0 من SN ، أضعف ما يمكن بحيث لدينا $S_n \geq 0,99 \Rightarrow n \geq n_0$

(4) ليكن q_n احتمال الحدث " الوجه رقم 1 يظهر مرة واحدة عند الرمان الأولى " .

أ- أحسب q_n بدلالة n .

ب- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_n}{n}$.

25 د. قسم للتسالة علوم رياضية ، تم تسعواات الطلبة وكان النتائج كما يلي :

- احتمال الطالب أن يحب الرياضيات 0,80

- احتمال الطالب أن يحب الفيزياء 0,50

- احتمال الطالب أن يحب الرياضيات والفيزياء هو 0,30

حدد احتمال أن يكون الطالب :

أ- يحب الرياضيات ولا يحب الفيزياء .

ب- يحب الرياضيات أو الفيزياء .

ج- أن لا يحب الرياضيات ولا فيزياء .

26 ليكن H و G عنصرين من N^* و n عنصر من N^* بحيث $n \leq |G|$

بحسب صندوق على H كـ n سهام و K كـ n موداء . بسبب من

الهندوق عشوائياً وفي آن واحد n كـ n .

(1) ليكن p هو احتمال الحصول على اللون الأحمر والمود .
 أسد أن $p = \frac{1}{C_{a+b}^n} = \sum_{k=0}^n C_a^k C_b^{n-k}$

$$q = \frac{C_a^n + C_b^n}{C_{a+b}^n}$$

(2) ليكن q هو احتمال الحصول على لون واحد . يس أن :

(3) استنتج أن $\sum_{k=0}^{n-1} C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n - (C_a^n + C_b^n)$

27 نوضح أنك للسرقة - p ، بغزافاً ورعد عسوائشاً على n حظ للمواصلة
 (1) أحسب احتمال A "لا حظ للمواصلة يرسل يعلم بغزافاً على الأقل" في حالة $p > \frac{1}{2}$.

(2) نعرض أن p من ظهور المواصلة من قبله من 1 ، التي n
 أحسب احتمال أن يسجل الحظ رقم n ، p بغزافاً حيث $\sum_{i=1}^n P_i = p$ ، $1 \leq n \leq \infty$
 (3) نعرض أن p ، أحسب احتمال P_n لكي يسجل الحظ على n بغزافاً ، ونعلم
 نحدد من أن ذلك n من ∞ $(1+x)^n \geq 1+nx$ (حيث $x \geq 0$)
 وأن: $P_{n+1} \leq \frac{1}{2} P_n$ ثم حدد $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$

28 نوفر سرحد في حصة على n معان مع (حيث $n \geq 3$) من بينها
 فقط مفتاحين يفتحان باب الفئول لصديقه .
 (1) سرحد المصير: بأما هذا أحد عسوائشاً من الأعداد
 أ ماهو الاحتمال أن قدح بأما هذا الباب ؟
 ب - ماهو الاحتمال أن يفتح أي منهما الباب ؟
 (2) سرحد المصير: على المصير أ قدح بأما هذا الباب ؟
 أ ماهو الاحتمال أن قدح بأما هذا الباب ؟
 ب - ماهو الاحتمال أن يفتح المصير من قدح الباب الواحد فقط من المقاسح ؟
 (3) أحد السعير من المقاسح الواحد ولو الآخر .
 ماهو الاحتمال أن يفتح المصير من قدح الباب في المعرفة رقم n ؟
 (4) أحد السعير من المقاسح الواحد ولو الآخر ما هذا السعير من المقاسح
 يدعى العسة .
 ماهو الاحتمال أن يكون واحد فقط من بين المقتاحين المصير من المقاسح الباب ؟

29 يحتوي صندوق الألعاب على 10 حمار ، و 10 سوداء ، و 10 سوداء
 (حيث $n \geq 2$) ، و 10 سوداء ، و 10 حمار ، و 10 سوداء
 نعرض عسوائشاً ، وأما سوداء من U_1 ، ونجها في U_2 ثم نحدد بأما
 يبدقتين من U_2 .
 (1) أحسب الاحتمال P_n المصير على يد حيد لهما نفس اللون من U_2 ؟
 (2) أحسب الاحتمال q_n للمصير على يد سوداء على الأقل من U_2 ثم حدد n
 إذا علمت أن $q_n = \frac{17}{36}$

البُنىات الجبرية

www.learnit.66ghz.com

قوانين التركيب الداخلي

I- قانون تركيب داخلي :

تعريف : كل تطبيق $f: E \times E \rightarrow E$ يسمى قانون تركيب داخلي في E .
 $(a,b) \mapsto f(a,b)$

ونرمز له $f(a,b)$ بأحد الرموز : $a \cdot b$ أو $a * b$ أو $a \circ b$ أو $a \triangle b$...
 إذا كانت المجموعة E مزودة بالقانون التركيب الداخلي T فنكتب (E, T)

حاصليات في (E, T) :

- * التجميعية : القانون T تجميعي في $E \iff \forall (a,b,c) \in E^3, aT(bTc) = aT(bTc)$
- * التبادلية : القانون T تبادلي في $E \iff \forall (a,b) \in E^2, aTb = bTa$
- * العنصر المحايد : e عنصر محايد للقانون $T \iff \forall a \in E, aTe = a \text{ و } eTa = e$
- * العنصر المعاكس : ليكن e العنصر المحايد للقانون T و $x \in E$
 x يقبل معاكس في $E \iff \exists x' \in E \text{ و } xTx' = e \text{ و } x'Tx = e$

حاصليات : * وجدانية العنصر المحايد :

إذا كان (E, T) يقبل عنصرًا محايدًا e فإن e وحيداً في E

* وجدانية العنصر المعاكس :

إذا كان (E, T) يقبل عنصرًا محايدًا e وكان T تجميعيًا وكان x

من E يقبل معاكس x' في E فإن x' وحيداً.

* إذا كان x معاكس x' و y معاكس y' في (E, T)

فإن $xTy' = yTx'$ معاكس xTy أي : $(xTy)' = yTx'$

التشاكلات : ليكن f تطبيق من E نحو F

f تشاكل من (E, T) نحو $(F, *) \iff \forall (x,y) \in E^2, f(xTy) = f(x) * f(y)$

حاصليات : ليكن f تشاكل من (E, T) نحو $(F, *)$

- T تجميعيًا في $E \iff * \text{ تجميعيًا في } f(E)$
- T تبادليًا في $E \iff * \text{ تبادليًا في } f(E)$
- e محايد في $(E, T) \iff f(e) \text{ محايد في } (f(E), *)$
- x' معاكس x في $(E, T) \iff f(x')$ معاكس $f(x)$ في $(f(E), *)$

جزء مستقر من $(E; T)$: لتكن $(E; T)$ و SCE

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad xTy \in S \Leftrightarrow (E, T) \text{ جزء مستقر من } S$$

خاصية : ليكن f تماثلًا من (E, T) نحو $(F, *)$

لدينا : $f(E)$ جزء مستقر من $(F, *)$.

العنصر المنتظم : ليكن $(E; T)$ و $a \in E$

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} aTx = aTy \Rightarrow x = y \\ xTa = yTa \Rightarrow x = y \end{array} \right. \Leftrightarrow a \text{ عنصر منتظم}$$

II - الزمرة : ليكن $(G; T)$

$$\left\{ \begin{array}{l} - T \text{ تجميعيًّا} \\ - T \text{ ثبيل عنصر معاكس} \\ - \text{كل عنصر من } E \text{ يقبل معاكسًا} \end{array} \right\} \Leftrightarrow (G, T) \text{ زمرة}$$

الزمرة الجزئية : لتكن (G, T) زمرة و H جزء من G ($H \subseteq G$)

نقول ان (H, T) زمرة جزئية للزمرة (G, T) اذا كان

H جزءًا مستقرًا من (G, T) و (H, T) زمرة.

$$\left\{ \begin{array}{l} H \neq \emptyset \text{ و } e \in H \\ \forall x \in H, x' \in H \\ \forall (x, y) \in H^2, xTy \in H \end{array} \right. \Leftrightarrow (H, T) \text{ زمرة جزئية للزمرة } (G, T)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in H^2, xTy' \in H \\ \text{لا مماثل } y' \end{array} \right. \Leftrightarrow (H, T) \text{ زمرة جزئية للزمرة } (G, T)$$

الزمرة والنساكل : ليكن f تماثلًا من (E, T) نحو $(F, *)$

لدينا : $(E; T)$ زمرة فإذن $(f(E), *)$ زمرة

حل معادلات في زمرة : لتكن (G, T) زمرة لدينا :

- كل عنصر من G منتظم

$$x = a'Tb \Leftrightarrow aTx = b \text{ - المعادلة}$$

$$x = bTa' \Leftrightarrow xTa = b \text{ - المعادلة}$$

حيث a' معاكس a

III - الحلقة : لتكن A مجموعة موروثة بفانوفين داخلين T و $*$.

توزيعية * بالنسبة لـ T: نقول أن * توزيعي بالنسبة لـ * إذا وفقط إذا كان:

$$\forall (x, y) \in A^2: x * (y T z) = (x * y) T (x * z)$$

$$(y T z) * x = (y * x) T (z * x) \quad 3$$

تعريف حلقة $(A; T; *)$:

(A, T) زمرة تبادلية.

* تجميعي.

* توزيعي بالنسبة لـ T.

نقول أن $(A, T, *)$ حلقة \Leftrightarrow

لكن $(A; T, *)$ حلقة:

- إذا كان * تبادلياً فنقول أن الحلقة $(A, T, *)$ تبادلية.

- إذا كان * له عنصر محايد فنقول أن الحلقة $(A, T, *)$ واحدة.

خواص في حلقة $(A; T, *)$:

ليكن a و b عنصران من A و a' و b' معادلتهما في الزمرة (A, T) و e العنصر المحايد بالنسبة لـ T لدينا:

$$a * e = e * a = e \quad (1)$$

$$a * b' = (a * b)' \quad (2)$$

$$a' * b' = a * b \quad (3)$$

$$u = \{x \in A \mid \exists x' \in A: \begin{cases} x * x' = e \\ x' * x = e \end{cases}\} \text{ زمرة تبادلية} \quad (4)$$

و $(A, T, *)$ حلقة واحدة. e العنصر المحايد لـ *.

الحلقة الكاملة: لنكن $(A, T, *)$ حلقة عنصر e بالمسبة لـ T

- نقول أن عنصر a من A قابلاً للعكس \Leftrightarrow $\begin{cases} \exists b \in A \setminus \{e\} \\ a \neq e \\ a * b = e \end{cases}$

- إذا كانت الحلقة $(A, T, *)$ تحتوي على قواسم للعنصر فنقول

أن $(A; T; *)$ حلقة كاملة.

حلقة المصفوفات المربعة:

- كل جدول $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ يسمى مصفوفة مربعة من الرتبة 2 ومجموعة مد \mathbb{R}

المصفوفات نرمز لها بـ $M_2(\mathbb{R})$. $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

- كل جدول $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ يسمى مصفوفة مربعة من الرتبة 3 ومجموعة هذه المصفوفات نرمز لها بـ $M_3(\mathbb{R})$.

الجمع في $M_2(R)$ و $M_3(R)$:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & j \\ b & e & i \\ c & f & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & d' & j' \\ b' & e' & i' \\ c' & f' & h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & d+d' & j+j' \\ b+b' & e+e' & i+i' \\ c+c' & f+f' & h+h' \end{pmatrix}$$

الضرب في $M_2(R)$ و $M_3(R)$:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & j \\ b & e & i \\ c & f & h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & d' & j' \\ b' & e' & i' \\ c' & f' & h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+db'+jc' & ad'+de'+ij' & ai'+dz'+jk' \\ ba'+ec'+id' & bd'+ee'+ij' & bi'+ej'+jk' \\ ca'+fd'+hk' & cd'+fe'+kf' & ci'+fz'+kh' \end{pmatrix}$$

خاصية : لدينا : $(M_2(R); +, \times)$ و $(M_3(R); +, \times)$ حلقتان واحديتان ولكن غير تبادليتان وغير كاملتان.

III - الجسم $(K, T, *)$: لنكن K مجموعة مزودة بقانونين داخليين

T و $*$ ،
نقول أن $(K, T, *)$ جسم $\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (K; T) \text{ زمرة تبادلية} \\ (K; \{e\}, *) \text{ زمرة حيث } e \text{ العنصر المحايد لـ } T \\ * \text{ توزيعي بالنسبة لـ } T \end{array} \right\}$

خاصيات : ليكن $(K, T, *)$ جسماً لدينا :

- كل عنصر من K منتظم بالنسبة لـ T .

- كل عنصر من $K \setminus \{e\}$ منتظم بالنسبة لـ $*$.

$$b = xTa \Leftrightarrow x = bTa' \quad -$$

$$b = aTx \Leftrightarrow x = a'Tb \quad -$$

$$(b \in K^*) \quad b = x*a \Leftrightarrow x = b*a' \quad -$$

$$b = a*x \Leftrightarrow x = a''*b \quad -$$

a' معادلة a بالنسبة لـ T و a'' معادلة a بالنسبة لـ $*$.

- $(K, T, *)$ حلقة كاملة أي :

$$\forall (a, b) \in K^2 : a*b = e \Leftrightarrow a = e \text{ أو } b = e$$

حيث : e العنصر المحايد لـ T .

قوانين التركيب الداخلية

1 ليكن * قانون مركب داخلي معرف على \mathbb{R} بمائلي :

$$x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

(1) بين أن القانون * تبادلي .

(2) بين أن القانون * غير تجميعي .

(3) بين أن القانون * يقبل عنصراً محايداً .

(4) حل في \mathbb{R} المعادلتين :

$$x * x = 1$$

$$- \text{ب}$$

$$2 * x = 5$$

$$- \text{أ}$$

الجواب : (1) لدينا لكل x و y من \mathbb{R} :

$$x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

$$= yx + (y^2 - 1)(x^2 - 1)$$

$$x * y = y * x$$

(لأن الضرب تبادلي في \mathbb{R})

ومنه القانون * تبادلي .

$$(-1 * 0) * 2 = 0 * 2 = -3$$

(2) لدينا .

$$-1 * (0 * 2) = -1 * -3 = 3$$

$$(-1 * 0) * 2 \neq -1 * (0 * 2)$$

لذا ،

ومنه القانون * غير تجميعي .

$$x * 1 = 1 * x = x$$

(3) لدينا لكل x من \mathbb{R} :

ومنه 1 هو العنصر المحايد للقانون * .

$$2 * x = 5$$

(4) أ- لنحل في \mathbb{R} المعادلة :

$$2 * x = 5 \Leftrightarrow 2x + 3(x^2 - 1) = 5$$

لدينا :

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ أو } x = \frac{4}{3}$$

مجموعة حلول المعادلة : $2 * x = 5$ هي : $S_1 = \{-2, \frac{4}{3}\}$

$$x * x = 1$$

ب- لنحل في \mathbb{R} المعادلة :

$$x * x = 1 \Leftrightarrow x^2 + (x^2 - 1)^2 = 1$$

لدينا :

$$x \times x = 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + x^2 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = -1 \text{ أو } x = 1$$

مجموعة حلول المعادلة: $x \times x = 1$ هي $S_2 = \{-1, 0, 1\}$.

2 نعرف على N^* القانون التركيب الداخلي T بما يلي:

$$\forall (x, y) \in N^* \times N^* : x T y = x^y$$

(1) هل القانون T تجميعي ؟

(2) حدد العناصر المنتظمة بالقانون T .

الجواب : (1) ليس : $(2T1)T3 = 2^1 T 3 = 2T3 = 2^3 = 8$

$$2T(2T3) = 2T2^3 = 2T8 = 2^8 = 256$$

$$(2T2)T3 \neq 2T(2T3)$$

وإذن : ومنه القانون T غير تجميعي .

(2) لحدد العناصر المنتظمة بالقانون T .

لكن a عنصر منتظم بالقانون T

$$\forall (x, y) \in N^* \times N^* : \begin{cases} x T a = y T a \Rightarrow x = y \\ a T x = a T y \Rightarrow x = y \end{cases} \text{ لدينا :}$$

$$(1) x T a = y T a \Leftrightarrow a^x = a^y$$

$$\Rightarrow x = y \quad (a \neq 1)$$

$$(2) a T x = a T y \Leftrightarrow x^a = y^a$$

$$\Rightarrow x = y \quad (\text{لأن } x, y > 0)$$

من (1) و (2) نستنتج أن كل عنصر a من $N^* \setminus \{1\}$ هو عنصر منتظم بالشعبة القانون T .

3 ليكن T قانون تركيب داخلي تجميعي على مجموعة E

(1) بين أن مجموعة العناصر المنتظمة جزء من (E, T)

$$(2) \text{ بغرض المجموعة : } C = \{a \in E \mid \forall x \in E \ a T x = x T a\}$$

بين أن C جزء من (E, T) .

الجواب: (1) ليكن a و b عنصران مختلفان من E .

لنبين أن $a \neq b$ عنصراً متتفاهاً من E .

$$x_T(a \neq b) = y_T(a \neq b) \quad : \text{لدينا لكل } x \neq y \text{ من } E$$

$$\Leftrightarrow (x \neq a) \neq b = (y \neq a) \neq b \quad (\text{قانون تجميعي})$$

$$\Rightarrow x \neq a = y \neq a \quad (\text{لأن } a \text{ عنصراً متتفاهاً})$$

$$\Rightarrow x = y \quad (\text{لأن } a \text{ عنصراً متتفاهاً})$$

$$(a \neq b) \neq x = (a \neq b) \neq y \Rightarrow x = y$$

ومنه $a \neq b$ عنصراً متتفاهاً

وبالتالي مجموعة العناصر المتتفاهاة جزء مشتق من (E, \neq) .

(2) ليكن a و b عنصران من C ، لنبين أن $a \neq b \in C$.

$$\text{لكل } x \neq \text{ من } E \text{ لدينا: (تعميم)} \quad (a \neq b) \neq x = a \neq (b \neq x)$$

$$= a \neq (x \neq b) \quad (\text{لأن } b \in C)$$

$$= (a \neq x) \neq b \quad (\text{قانون تجميعي})$$

$$= (x \neq a) \neq b \quad (\text{لأن } a \in C)$$

$$(a \neq b) \neq x = x \neq (a \neq b) \quad (\text{لأن } a, b \text{ عنصراً متتفاهاً})$$

$$a \neq b \in C \quad \text{ومنه:}$$

وبالتالي C جزء مشتق من (E, \neq) .

4 ليكن $*$ قانون تركيب داخلي على R بحيث لكل a و b و c من R

$$(R_1): \quad 0 * a = -a \quad \text{لدينا العلاقة}$$

$$(R_2): \quad a * (b * c) = c * (b * a)$$

$$a * (b * c) = (a * b) * (-c) \quad : \text{بين أن لكل } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ من } R$$

(2) اعلم مثال لعانون اعتيادي في R يحقق شروط القانون $*$.

الجواب: (1) ليكن a و b و c من R لدينا:

$$a * (b * c) = (a * (-a)) * (b * c) \quad (\text{حسب العلاقة } (R_1))$$

$$= (0 * (a * a)) * (b * c) \quad (\text{حسب العلاقة } (R_2))$$

$$= (a * (0 * 0)) * (b * c) \quad (\text{حسب العلاقة } (R_2))$$

$$a * (b * c) = (a * 0) * (b * c) \quad (\text{حسب العلاقة } (R_1))$$

$$= c * (b * (a * 0)) \quad (\text{حسب العلاقة } (R_2))$$

$$= c * (0 * (a * b)) \quad (\text{حسب العلاقة } (R_3))$$

$$= (a * b) * (0 * c) \quad (\text{حسب العلاقة } (R_4))$$

$$= (a * b) * (-c) \quad (\text{حسب العلاقة } (R_5))$$

$$a * (b * c) = (a * b) * (-c) \quad \text{وبالتالي:}$$

(2) لدينا القانون - (الطرح في \mathbb{R}) قانون تركيب داخلي يعقّف

$$0 - a = -a \quad \text{و} \quad a - (b - c) = c - (b - a) \quad * \quad \text{شروط القانون}$$

لتكن $(\mathbb{Z}, *)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي * تجميعي

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 : (x * y)^3 = y * x \quad \text{بعبارة:}$$

بين أن القانون * تبادلي.

الجواب: لكل x و y من \mathbb{Z} لدينا: $x * y = (y * x)^3$

$$= [(y * x)^3]^3$$

$$= [(y * x)(x * y)^2]^3$$

$$= (x * y)^2 * (x * y)$$

$$= (x * y)^3 = y * x$$

$$x * y = y * x \quad \text{ومنه:}$$

وبالتالي القانون * تبادلي.

6 نرصد \mathbb{R} بقانون تركيب داخلي * يعقّف العلاقات التالية:

لكل x و y و z من \mathbb{R} :

$$(R_1): \quad x * y = y * x$$

$$(R_2): \quad x * 1 = x$$

$$(R_3): \quad \exists k \in \mathbb{N}^* : (x * y) * (y * z) = z^k (x * y)$$

(1) بين أن: $k = 2$

(2) استنتج أن: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x * y = xy$

الاجواب : (1) ليكن x من R^k و y من R^k لدينا .

$$x * y = \left(\frac{x}{y} y\right) * (1 y) = y^k \left(\frac{x}{y} * 1\right) = y^k \cdot \frac{x}{y} = x y^{k-1}$$

$$y * x = y x^{k-1} \quad \text{وبالمثل نستنتج أن}$$

$$x * y = y * x \iff x y^{k-1} = y x^{k-1} \quad \text{وهذه :}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^k : x y^{k-1} = y x^{k-1} \quad \text{أي :}$$

$$y = \frac{1}{2} \quad ; \quad x = 1 \quad \text{بالمخصوص إذا كان}$$

$$k-1 = 1 \quad \text{أي} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \quad \text{حيث}$$

$$k = 2 \quad \text{وبالتالي}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \quad x * y = x y^{k-1} \quad (2) \text{ لدينا .}$$

$$= x y \quad (k=2 \text{ أي})$$

$$0 * 0 = 0^2 (1 * 1) = 0 \quad \text{وبما أن}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x * y = x y \quad \text{حيث}$$

7 ليكن E مجموعة مورو $*$ بالعانوان تركيب $*$ أحلي $*$ جمعية

نعرض أن كل عنصر من E هو عنصر مستقيم بالعانوان $*$

$$\exists \alpha \in E \quad \alpha * \alpha = \alpha \quad \text{؟}$$

سأبأن α وجيد .

الاجواب : نفترض أنه يوجد p من E بحيث $p \neq p$ و $p * p = p$

$$(\alpha * \alpha) * p = \alpha * p \quad \text{لدينا}$$

$$= \alpha * (p * p)$$

$$(\alpha * \alpha) * p = (\alpha * p) * p \quad (\text{لأن } * \text{ جمعية})$$

$$\alpha * \alpha = \alpha * p \quad \text{وبما أن } p \text{ مستقيم بالعانوان } *$$

$$\alpha = p \quad \text{وبما أن } \alpha \text{ مستقيم بالعانوان } *$$

وبالتالي : α وجيد .

8 لنك ($E, *$) مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي * تحقق

$$(R) \quad \forall (w, x, y, z) \in E^4 \quad (w * x) * (y * z) = w * z$$

(2) مع أن كل a و b و c من E لدينا $c = a * b \Rightarrow c * c = c$

(2) استنتج أن كل a و b و x من E لدينا: $(a * b) * x = a * x$

الاجواب: (1) لكل a و b و c من E لدينا يجب $c = a * b$

$$c * c = (a * b) * (a * b) = a * b = c$$

(2) لكل a و b و x من E لدينا:

$$a * x = (a * b) * (a * x) \quad (\text{حسب العلاقة } (R))$$

$$= [(a * b) * (a * b)] * (a * x) \quad (\text{حسب السؤال (2)})$$

$$a * x = (a * b) * x \quad (\text{حسب العلاقة } (R))$$

9 لنك (E, T) مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي T بحيث:

(1) كل عنصر من E هو منظم

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (y T z) T x = (y T x) T (z T x) \quad (2)$$

$$\forall y \in E : y T y = y \quad \text{بين أن:}$$

الاجواب: ليكن x و y من E لدينا:

$$(x T y) T y = (x T y) T (y T y)$$

وبما أن كل عنصر من E منتظم فإن:

$$(x T y) T y = (x T y) T (y T y) \Rightarrow y = y T y$$

10 لنك ($E, *$) مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي * بحيث:

$$(R_2) : \forall x \in E : x * x = x$$

$$(R_1) : \forall (x, y, z) \in E^3 : (x * y) * z = (y * z) * x$$

بين أن * تبادلي.

الاجواب: ليكن x و y من E لدينا:

$$y * x = (y * y) * x \quad (\text{حسب العلاقة } (R_2))$$

$$\begin{aligned}
 y * x &= (x * y) * y & (\text{حسب العلاقة } (R_2)) \\
 &= [(x * x) * y] * y & (\text{حسب العلاقة } (R_3)) \\
 &= [(x * y) * x] * y & (\text{حسب العلاقة } (R_3)) \\
 &= (x * y) * (x * y) & (\text{حسب العلاقة } (R_4)) \\
 y * x &= x * y & (\text{حسب العلاقة } (R_5))
 \end{aligned}$$

وبالتالي القانون * تبادلي.

11 برود المجموعة E بقانون تركيب داخلي بحيث :
 $\forall (x, y) \in E^2 \quad x * (x * y) = (y * x) * x = y$
 بين أن القانون * تبادلي.

الجواب نكل y من E لدينا :

$$x * y = [(x * y) * x] * x$$

وذلك بتعويض $x * y$ بـ y بالعلاقة : $(y * x) * x = y$

$$x = (x * y) * y$$

$$x * y = [(x * y) * x] * x \quad \text{فإن :}$$

$$= [(x * y) * (x * y) * y] * x$$

$$(x * y) * ((x * y) * y) = y \quad \text{وبما أن :}$$

$$x * y = y * x \quad \text{فإن :}$$

ومنه القانون * تبادلي.

12 لنك $(E, *)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي تجميعي

ليكن x من E ، نعر العلاقة (R) المعرفة بـ : $x * x = x$

(أ) بين أنه إذا كان x ولا يحققان العلاقة (R) و $x * y = y * x$

فإن : $x * y$ يحقق العلاقة (R) .

(ب) نفترض أن $*$ يتقبل عنصرًا محايدًا و x عنصري قابل مماثل

ويحقق العلاقة (R) .

بين أن مماثل x يحقق العلاقة (R) .

الجواب : (1) ليكن x و y من E بحيث : $x * x = x$ و $y * y = y$

لدينا :

$$(x * y) * (x * y) = (x * (y * x)) * y$$

$$= (x * (x * y)) * y \quad (x * y = y * x)$$

$$= ((x * x) * y) * y \quad (*) \text{ تجميعي }$$

$$= (x * x) * (y * y) \quad (*) \text{ تجميعي }$$

$$(x * y) * (x * y) = x * y \quad (x * x = x \text{ و } y * y = y)$$

ومنه $x * y$ يحقق العلاقة (R)

(2) لتكن x' مماثل x بالنسبة للقانون $*$ لدينا :

$$x' * x' = (x * x)' = x' \quad (x * x = x)$$

ومنه x' يحقق العلاقة (R).

13 لتكن $(E, *)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي تجميعي

(1) بين أن كل عنصر يقبل مماثل بالقانون $*$ فهو عنصر منتظم.

(2) بين بإعطاء مثل مضاد أن عكس هذه الخاصية خاطئ.

الجواب : ليكن x عنصرًا من E يقبل مماثل بالقانون $*$

لدينا لكل y و z من E :

$$x * y = x * z \Rightarrow x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * (x * z)$$

$$\Rightarrow (x^{-1} * x) * y = (x^{-1} * x) * z \quad (*) \text{ تجميعي}$$

$$\Rightarrow e * y = e * z \quad (e \text{ العنصر المحايد})$$

$$\Rightarrow y = z$$

وأن x منتظم على اليسار بالنسبة لـ $*$

وبنفس الطريقة نثبت أن x منتظم على اليمين بالنسبة لـ $*$

ومنه فإن x عنصر منتظم بالنسبة للقانون $*$.

(2) لدينا : $(\mathbb{N}, +)$ كل عنصر من \mathbb{N} هو عنصر منتظم بالنسبة للجمع +

وكذا لا يقبل مماثل.

14 لكن $(E, *)$ مجموعة مزودة بعنصرون تركيب داخلي * نجميعي يحقق الشرطين:

$$\exists (a, e) \in E^2 : a * e = e \quad (1)$$

$$(2) \text{ التطبيق : } E \rightarrow E \quad \text{علا تبايني : } x \mapsto a * x$$

$$\forall x \in E : e * x = x \quad (1) \text{ بين أن :}$$

$$(2) \text{ نفترض أنه يوجد } b \text{ من } E \text{ بحيث : } a * b = e$$

$$\text{بين أن : } b * a = e$$

الجواب = (1) لا ينال كل x من E :

$$\gamma_a(e * x) = a * (e * x)$$

$$= (a * e) * x \quad (1) \text{ قانون تجميعي}$$

$$= a * x \quad (2) \text{ لأن : } a * e = a$$

$$\gamma_a(e * x) = \gamma_a(x) \quad \text{ومنه :}$$

$$\forall x \in E \quad e * x = x \quad \text{وسأنا علا تطبيق تبايني فإن :}$$

$$(2) \text{ لدينا : } \gamma_a(b * a) = a * (b * a)$$

$$= (a * b) * a \quad (1) \text{ لأن : } a * b = e$$

$$= e * a = a \quad (2) \text{ لأن : } e * a = a$$

$$= a * e$$

$$\gamma_a(b * a) = \gamma_a(e) \quad \text{ومنه :}$$

$$b * a = e \quad \text{وسأنا علا تبايني فإن :}$$

15 عنصر ماون التركيب الداخلي المعروف على R بمبايلي :

$$\forall (x, y) \in R^2 : x * y = x + y - xy$$

نعتبر التطبيق f المعروف من R نحو R بمبايلي :

$$f(x) = 1 - x$$

(1) بين أن f مناكل تعاقلي من $(R, +)$ نحو (R, \times)

(2) اشتغ مايلي : $f - *$ تجميعي .

ب - يقبل عنصر محايد ينم تعد يد .

(3) عدد مجموعة العناصر التي تقبل معادل بالعانون *

(4) ليكن $a \in R$ احسب $A = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ مرة}}$

الجواب : (1) لدينا : $\forall y \in R \exists! x = 1 - y \in R : f(x) = y$

ومنه f تقابل من R نحو R

لكل x, y من R لدينا :

$$\begin{aligned} f(x+y) &= 1 - x * y \\ &= 1 - (x + y - xy) \\ &= 1 - x + xy - y = (1 - x) - y(1 - x) \\ &= (1 - x)(1 - y) \end{aligned}$$

ومنه : $f(x+y) = f(x)f(y)$

وبالتالي : f تشاكل تعالي من $(R, *)$ نحو (R, \times)

(2) أ- صا أن f تشاكل تعالي من $(R, *)$ نحو (R, \times) فإن شبه

المجموعة $(R, *)$ هي نفس شبه المجموعة (R, \times)

وصا أن X تجميعي في R فإن $*$ تجميعي في R .

ب- بما أن 1 هو العنصر المحايد بالنسبة لـ (R, \times) فإن $f^{-1}(1)$

هو العنصر المحايد بالنسبة لـ $(R, *)$

وصا أن $f^{-1}(x) = f(x)$ فإن $f(1) = 0$ ومنه 0 هو العنصر

المحايد بالنسبة لـ $(R, *)$

(3) لدينا 0 هو العنصر الوحيد الذي لا يقبل معادل بالنسبة لـ (R, \times)

وصا أن $f(0) = 1$ فإن مجموعة العناصر التي تقبل معادل

بالنسبة لـ $(R, *)$ هي : $R - \{1\}$

(4) لدينا لكل $a \in R$

$$f(A) = f(\underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ مرة}}) = \underbrace{f(a) \times f(a) \times \dots \times f(a)}_{n \text{ مرة}}$$

$$f(A) = (f(a))^n = (1 - a)^n$$

$$A = f^{-1}((1 - a)^n)$$

ومنه :

وبما أن $f^{-1}(x) = f(x)$ لكل $x \in R$ فإن :

$$A = 1 - (1 - a)^n$$

16

نضع $I =]0, +\infty[$ ، نعرف على I قانون التركيب الداخلي * ب :

$$\forall (x, y) \in I^2 : x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

نعتبر التطبيق f المعرف من I نحو I بما يلي : $f(x) = x^2$

$$(1) \text{ سنأخذ كل } x \text{ و } y \text{ من } I : f(x * y) = f(x) + f(y)$$

(2) أ- هل القانون * تجميعي ؟

ب- هل القانون * يقبل عنصر محايد ؟

$$(3) \text{ ليكن } a \text{ من } I ، أكتب : } a = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ مرة}}$$

الجواب : (1) ليكن x و y من I لدينا :

$$f(x * y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = x^2 + y^2$$

$$\text{ومنه : } f(x * y) = f(x) + f(y)$$

(2) ملاحظته هامة : f تناكّل تعابلي من $(I, +)$ نحو $(I, *)$

لذلك بنية المجموعة $(I, +)$ هي بنية المجموعة $(I, *)$

أ- بما أن القانون + تجميعي على I فإن * تجميعي على I .

ب- بما أن $(I, +)$ لا يقبل عنصر محايد فإن * لا يقبل عنصر محايد في I

$$(3) \text{ لدينا : } f(\underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ مرة}}) = \underbrace{f(a) + f(a) + \dots + f(a)}_{n \text{ مرة}}$$

$$= \underbrace{a^2 + a^2 + \dots + a^2}_{n \text{ مرة}} = n a^2$$

$$\text{ومنه : } \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ مرة}} = f^{-1}(n a^2) \quad (f \text{ تناكّل من } I \text{ نحو } I)$$

$$\text{وبما أن كل } x \text{ من } I : f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{فإن : } \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ مرة}} = a \sqrt{n}$$

17

نزد المجموعة \mathbb{R}^2 بقانون التركيب الداخلي * المعرف بما يلي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y) * (x', y') = (xx', yy')$$

(1) بين أن القانون * تجميعي وتبادلي.

(2) سنأخذ القانون * يقبل عنصرًا محايدًا ثم حدد عناصر \mathbb{R}^2 التي يقبل معاكسها بالنسبة للقانون *.

$$(3) \text{ نعتبر المجموعة } S = \mathbb{R} * \{0\}$$

- أ- بين أن S جزء مستقر من $(\mathbb{R}^2, *)$
 ب- بين أن $(S, *)$ تقبل عنصرًا محايدًا^{١٥} قارن العنصرين المتبادلين
 لكل من $(\mathbb{R}^2, +)$ و $(S, +)$

الحوار : ١- لتبين أن القانون $*$ تبادلي .
 لكل (x, y) و (x', y') من \mathbb{R}^2 لدينا :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', yy') = (x'x, y'y) = (x', y') * (x, y)$$

ومنه $*$ قانون تبادلي .

لتبين $*$ قانون تجميعي .

ليكن (x, y) و (x', y') و (x'', y'') من \mathbb{R}^2 لدينا :

$$\begin{aligned} [(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') &= (xx', yy') * (x'', y'') \\ &= (xx'x'', yy'y'') \\ &= (x(x'x''), y(y'y'')) \\ &= (x, y) * (x'x'', y'y'') \end{aligned}$$

$$[(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') = (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')]$$

ومنه فإن القانون $*$ تجميعي .

٢- لتبين أن القانون $*$ تقبل عنصرًا محايدًا

كل (x, y) من \mathbb{R}^2 لدينا :

$$(x, y) * (1, 1) = (x, y)$$

وبما أن $*$ قانون تبادلي فإن $(1, 1)$ هو العنصر المحايد للقانون $*$

لنعد العناصر التي تقبل مماثل بالنسبة $*$.

ليكن (x, y) و (x', y') من \mathbb{R}^2 لدينا :

$$(x, y) * (x', y') = (1, 1) \Leftrightarrow (xx', yy') = (1, 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xx' = 1 \\ yy' = 1 \end{cases}$$

إذا كان $x \neq 0$ و $y \neq 0$ فإن $x' = \frac{1}{x}$ و $y' = \frac{1}{y}$

إذاً كل عنصر (x, y) من $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ يقبل مماثل $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ بالنسبة $*$.

(٣) ١- نضع : $S = \mathbb{R} \times \{0\}$

لتبين أن S جزء مستقر من $(\mathbb{R}^2, +)$.

ليكن $(x, 0)$ و $(y, 0)$ عنصرا من S لدينا :

$$(x, 0) * (y, 0) = (xy, 0)$$

ومنه : $(x, 0) * (y, 0) \in S$

وبالتالي S جزء مغلق من $(\mathbb{R}^2, *)$.

ب- لكل $(x, 0)$ من S لدينا :

$$(x, 0) * (1, 0) = (x, 0)$$

$$(1, 0) * (x, 0) = (x, 0)$$

ومنه $(S, *)$ يقبل $(1, 0)$ كعنصر محايد.

لدينا $(1, 0)$ عنصر محايد لـ $(S, *)$ و $(1, 1)$ عنصر محايد لـ $(\mathbb{R}^2, *)$

ومنه : $(1, 1) \neq (1, 0)$.

ملاحظة :

$$\begin{cases} (S, *) \text{ جزء مغلق} \\ (S, *) \text{ عنصر محايد لـ } (S, *) \\ (G, *) \text{ عنصر محايد لـ } (G, *) \end{cases} \Rightarrow e_S = e_G$$

18 نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} قانون التركيب الداخلي T

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad z T z' = z \bar{z}'$$

المعروف بما يلي :

(1) أدرس تبادلية وجمعية القانون T

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة : $(z T z) T z = 1$

الجواب : (1) لدينا :

$$1 T 1 = -1 \quad \text{و} \quad 1 T 1 = 1$$

ومنه :

$$1 T 1 \neq 1 T 1$$

وبالتالي القانون T غير تبادلي.

لدينا :

$$1 T (1 T 1) = 1 T (-1) = 1 \cdot 1 = -1$$

$$(1 T 1) T 1 = 1 T 1 = 1 \cdot (-1) = -1$$

ومنه :

$$1 T (1 T 1) \neq (1 T 1) T 1$$

وبالتالي T قانون غير تجميعي.

(2) نحل في \mathbb{C} المعادلة : $(z T z) T z = 1$:

$$z T z = \bar{z} \quad (z T z) T z = \bar{z} T z = \bar{z} \bar{z} = |z|^2 \bar{z}$$

لدينا :

$$(z \cdot \bar{z}) \cdot z = i \Leftrightarrow |z|^2 \bar{z} = i \quad \text{لدينا.}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{حيث } z = x + iy \quad \text{نضع:}$$

$$|z|^2 \bar{z} = i \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x - iy) = i \quad \text{ومنه.}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)x - i(x^2 + y^2)y = i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)x = 0 \\ (x^2 + y^2)y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ أو } x^2 + y^2 = 0 \\ (x^2 + y^2)y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$S = \{-1\} \quad \text{وهي مجموعة حلول المعادلة (E) هي}$$

19 نمر - f لمجموعة الدوال الناقية، وعناصرها $f_{(a,b)}$

$$f_{(a,b)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{بحيث:}$$

$$f_{(a,b)}: x \mapsto ax + b$$

يرود f بعملية تركيب الدوال \circ ، ونزود \mathbb{R}^2 بفان كومب
، اقليدس.

$$h: f \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{بعضر التشفيف:}$$

$$f_{(a,b)} \mapsto (a, b)$$

حدد القانون T إذا علمت أن التشفيف h نسا كلا من (\mathbb{R}, T)

الجواب - لدينا h نسا كلا من (A, \circ) و (\mathbb{R}^2, T) إذ لو نظرنا إذا كان

$$\text{لكل } f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')} \in f \quad \text{من } f \text{ لدينا:}$$

$$h(f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')}) = h(f_{(a,b)}) T h(f_{(a',b')})$$

$$= (a, b) T (a', b')$$

$$\text{لنحدد } f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')}$$

$$(f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')})(x) = f_{(a,b)}(f_{(a',b')}(x)) \quad \text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا:}$$

$$= f_{(a,b)}(a'x + b') = a(a'x + b') + b$$

$$= aa'x + ab' + b = f_{(aa', ab' + b)}(x)$$

$$f(a,b) \circ f(a',b') = f(aa', ab'+b) \quad \text{ومنه}$$

$$h(f(a,b) \circ f(a',b')) = (aa', ab'+b) \quad \text{إذن}$$

ومن القانون τ معرف بماليي: لكل (a,b) و (a',b') من \mathbb{R}^2 :

$$(a,b) \tau (a',b') = (aa', ab'+b)$$

20 لتكن (F, τ) مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي τ تجميعي

وليكن e من F .

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي معرف على F بماليي:

$$\forall (x,y) \in F^2: \quad x * y = x \tau a \tau y$$

(أ) من أنه إذا كان τ تبادلي فإن $*$ تبادلي.

(ب) بين أن $*$ تجميعي.

(ج) نفرض أن τ تبادلي وبقبل عنصرًا معابدًا e وأن كل عنصر من F يقبل معادل بالنسبة للقانون τ .

١- بين أن $*$ يقبل عنصرًا معابدًا. نعم تعدد.

ب- بين أن كل عنصر من F يقبل معادل بالنسبة لـ $*$.

الجواب: (أ) نفترض أن τ تبادلي.

لدينا لكل x و y من F :

$$x * y = x \tau a \tau y$$

$$= (x \tau a) \tau y \quad (\text{لأن } \tau \text{ تجميعي})$$

$$= (a \tau x) \tau y \quad (\text{لأن } \tau \text{ تبادلي})$$

$$= a \tau (x \tau y) \quad (\text{لأن } \tau \text{ تجميعي})$$

$$= a \tau (y \tau x) = (a \tau y) \tau x = (y \tau a) \tau x$$

$$= y \tau a \tau x$$

إذن: $x * y = y * x$ ومنه $*$ قانون تبادلي.

(ب) لنبين أن $*$ تجميعي.

لكل x و y و z من F لدينا:

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x \tau \alpha \tau y) * z = (x \tau \alpha \tau z) \tau \alpha \tau z \\ &= x \tau \alpha \tau (y \tau \alpha \tau z) \quad (\text{لأن } \tau \text{ تجميعي}) \\ &= x \tau \alpha \tau (y * z)\end{aligned}$$

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad \text{أي:}$$

ومنه القانون * تجميعي .

(3) أ- لنبين أن القانون * يقبل عنصرًا محايدًا .

أي: $\exists e_0 \in F \quad \forall x \in F \quad x * e_0 = x$ (لأن * تبادلي)

$$x * e_0 = x \Leftrightarrow x \tau \alpha \tau e_0 = x \quad \text{لكل } x \text{ من } F :$$

بما أن كل عنصر من F يقبل معًا مثل بالنسبة للقانون τ

نرمز له x^{-1} لمعاثل x بالنسبة للقانون τ .

$$x \tau \alpha \tau e_0 = x \Leftrightarrow x^{-1} \tau (x \tau \alpha \tau e_0) = x^{-1} \tau x$$

$$\Leftrightarrow (x^{-1} \tau x) \tau (\alpha \tau e_0) = e$$

$$\Leftrightarrow e \tau (\alpha \tau e_0) = e$$

$$\Leftrightarrow \alpha \tau e_0 = e$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^{-1} \tau \alpha) \tau e_0 = \alpha^{-1} \tau e$$

$$\Leftrightarrow e \tau e_0 = \alpha^{-1}$$

$$\Leftrightarrow e_0 = \alpha^{-1}$$

إذن e_0 هو معًا مثل α بالنسبة للقانون τ .

ب- لنبين أن كل عنصر x من F يقبل معًا مثل بالنسبة *

بما أن * تبادلي يكفي أن نبين أن: $\forall x \in F \quad \exists x' \in F \quad x * x' = e_0$

(x معًا مثل x بالنسبة *)

$$\forall x \in F \quad \exists x' \in F : x \tau \alpha \tau x' = e_0 \quad \text{أي:}$$

$$x \tau \alpha \tau x' = e_0 \Leftrightarrow x^{-1} \tau (x \tau \alpha \tau x') = x^{-1} \tau e_0 \quad (\text{لأن } x^{-1} \text{ معًا مثل } x \text{ بالنسبة } \tau)$$

$$\Leftrightarrow (x^{-1} \tau x) \tau (\alpha \tau x') = x^{-1} \tau e_0$$

$$\Leftrightarrow e \tau (\alpha \tau x') = x^{-1} \tau e_0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \tau x' = x^{-1} \tau e_0 \Leftrightarrow (\alpha^{-1} \tau \alpha) \tau x' = \alpha^{-1} \tau (x^{-1} \tau e_0)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \tau x' = \alpha^{-1} \tau x^{-1} \tau e_0 = \alpha^{-1} \tau e_0 \tau x^{-1}$$

$$x' = \alpha^{-1} \tau \alpha^{-1} \tau x^{-1} \quad \text{بما أن } e_0 = \alpha^{-1} \text{ فإن:}$$

21 برود المجموعة $G = \langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ بقانون مركب داخلي \perp المعروف بمبايلي

$$\forall (z, z') \in G^2: z \perp z' = zz' + i(z + z') - (1 + i)$$

(1) حدد العنصر المعايير بالقانون \perp .

(2) بين أن كل عنصر من G يقبل معاكس.

$$(3) \text{ عكس التماثل } f: (\mathbb{C}^*, x) \rightarrow (G, \perp) \\ z \mapsto z - i$$

أثبت أن f تماثل تماثلي.

ب- استنتج أن القانون \perp تجميعي.

الاجواب: (1) ليكن e عنصر من G بحيث $\forall z \in G, z \perp e = z$

$$\Leftrightarrow \forall z \in G: ze + i(z + e) - 1 - i = z \quad (\perp \text{ تساوي})$$

$$\Leftrightarrow \forall z \in G: z(e + i - 1) + ie - 1 - i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e + i - 1 = 0 \\ ie - 1 - i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow e = 1 - i$$

إذن القانون \perp يقبل عنصرًا معاكسًا $e = 1 - i$

$$(2) \text{ ليس أن } \forall z \in G \exists z' \in G, z \perp z' = 1 - i \quad (\text{بناولي})$$

ليكن z من G لحل المعادلة $z \perp z' = 1 - i$ ذات المجهول z'

$$z \perp z' = 1 - i \Leftrightarrow zz' + i(z + z') - (1 + i) = 1 - i$$

$$\Leftrightarrow z'(z + i) = 2 - iz$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{2 - iz}{z + i} \quad (z \neq -i)$$

وبالتالي كل عنصر من G يقبل معاكسًا بالنسبة للقانون \perp .

(3) أثبت أن f تماثل تماثلي.

$$f(z_1 z_2) = z_1 z_2 - i \quad \text{ليكن } z_1, z_2 \text{ من } \mathbb{C}^* \text{ لدينا}$$

$$\begin{aligned} f(z_1) \perp f(z_2) &= (z_1 - i) \perp (z_2 - i) \\ &= (z_1 - i)(z_2 - i) + i(z_1 - i + z_2 - i) - (1 + i) \\ &= z_1 z_2 - i z_1 - i z_2 - 1 - i z_1 + i + i z_2 + 1 - 1 - i \end{aligned}$$

$$f(z_1) \perp f(z_2) = z_1 z_2 - i \quad \text{إذن} \\ f(z_1 z_2) = f(z_1) \perp f(z_2) \quad \text{ومن هنا}$$

إذن μ تشاكل من (G, \perp) نحو (G, \perp)
 لدينا بدلياً μ تقابل من G نحو G .
 وبالتالي μ تشاكل تقابلي من (G, \perp) نحو (G, \perp) .
 ب- بما أن μ تشاكل تقابلي من (G, \perp) نحو (G, \perp) فإن (G, \perp)
 لها نفس بنية (G, \perp) .
 وبما أن X تجميعي في G فإن القانون \perp تجميعي في G .

22 لنكن (E, μ) مجموعة موروثة بقانون تركيب داخلي * تجميعي
 بحيث لكل a من E التكيف $E \rightarrow E$ $a \mapsto a * x$ $x \mapsto a * x$ a تبايني.
 (1) يكن μ من E بحيث $\mu * \mu = \mu$.
 يت أن $\forall x \in E, \mu * x = x$.
 (2) يكن α, β من E بحيث $\alpha * \alpha = \beta$ و $\beta * \beta = \beta$ و $\alpha \neq \beta$.
 بين أنه لا يوجد أب زوج (x, y) من E^2 بحيث $x * \alpha = y * \beta$.

الجواب: (1) لكل x من E لدينا:
 $(*)$ (تجميعي) $\mu * (\mu * x) = \mu * (\mu * x) = (\mu * \mu) * x = \mu * x$
 (لأن $\mu * \mu = \mu$)
 ومنه $\mu * x = x$
 وبما أن μ تكيف تبايني فإن $\forall x \in E, \mu * x = x$.
 (2) نفرض أنه يوجد زوج (x, y) من E^2 بحيث $x * \alpha = y * \beta$.
 بما أن $\alpha * \alpha = \beta$ فإن حسب السؤال (1) لدينا:
 $x * (\alpha) = x * \alpha = y * \beta = y * (\beta * \beta)$
 $= (y * \beta) * \beta = (x * \alpha) * \beta$
 $\forall x (\alpha) = x * (\alpha * \beta)$
 ومنه $\forall x (\alpha) = \forall x (\alpha * \beta)$.
 بما أن α تكيف تبايني فإن $\alpha = \alpha * \beta$.
 أي $\alpha = \beta$ (لأن $\alpha * \beta = \beta$)
 وهذا تناقض مع كون $\alpha \neq \beta$.

والثاني لا يوجد أي زوج (x, y) من E^2 بحيث : $x * d = y * p$.

23 لتكن (E, \vee) مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ و A و B جزئين من E نرسم بـ : $A \times B$ بالمجموعة :

$$A \times B = \{ x \in E \mid \exists (a, b) \in A \times B : x = a * b \}$$

نفترض أن $*$ تجميعي و A و B جزئين مستقرين من E .

(1) بين أن $A * B$ ليس بالضرورة جزء مستقر من E .

(2) من أجله إذا كان : $B * A \subset A * B$ فإن $A * B$ جزء مستقر من E .

الجواب : (1) مثال معاد : ليكن $E = M_2(R)$ و $x = X$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad ; \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{نضع : } K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{لدينا : } IK = K \quad ; \quad IJ = J \quad ; \quad J^2 = I \quad ; \quad K^2 = I$$

ومنه A و B جزئين مستقرين بالنسبة للقانون X في $M_2(R)$

$$A * B = \{ I, J, K, JK \}$$

ولدينا :

$$(JK)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \notin A * B$$

ومنه $A * B$ جزء غير مستقر في $M_2(R)$ بالنسبة لـ $*$.

$$X \in A * B \Leftrightarrow \exists (a, b) \in A \times B : X = a * b \quad \text{لدينا : (2)}$$

$$Y \in A * B \Leftrightarrow \exists (d, p) \in A \times B : Y = d * p$$

$$X * Y = (a * b) * (d * p)$$

ومنه :

$$= a * (b * d) * p \quad (\text{لأن } * \text{ تجميعي})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b \in B \\ d \in A \end{array} \right\} \Rightarrow b * d \in B * A \subset A * B$$

لدينا :

$$\exists (d_0, p_0) \in A \times B : b * d = d_0 * p_0$$

ومنه :

$$X * Y = a * (d_0 * p_0) * p$$

إذاً :

$$= (a * d_0) * (p_0 * p)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0 \in A \\ a * d_0 \in A \end{array} \right\} \Rightarrow a * d_0 \in A \quad \text{لدينا :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 \in B \\ p_0 * p \in B \end{array} \right\} \Rightarrow p_0 * p \in B$$

ومنه : $x * y \in A * B$
وبالتالي $A * B$ جزء مستقر من E .

24 ليكن f تشاكل من $(E, *)$ نحو (F, T)

وليكن A جزء مستقر من $(E, *)$ و B جزء مستقر من (F, T)

(1) بين أن $f^{-1}(B)$ جزء مستقر من $(E, *)$.

(2) بين أن $f(A)$ جزء مستقر من (F, T) .

الجواب : (1) ليكن x, y من $f^{-1}(B)$ إذن : $f(x) \in B$ و $f(y) \in B$

وبما أن B جزء مستقر من (F, T) فإن : $f(x) T f(y) \in B$

وبما أن f تشاكل من $(E, *)$ نحو (F, T) فإن : $f(x) T f(y) = f(x * y)$

إذن : $f(x * y) \in B$ ، ومنه : $x * y \in f^{-1}(B)$

وبالتالي $f^{-1}(B)$ جزء مستقر من $(E, *)$.

(2) ليكن x و y من $f(A)$ إذن : $x = f(a)$ و $y = f(b)$: $\exists (a, b) \in A^2$

وبما أن : $\exists T y = f(a) T f(b) = f(a * b)$ (لأن f تشاكل من $(E, *)$ نحو (F, T))

وبما أن A جزء مستقر من $(E, *)$ فإن $a * b \in A$

ومنه : $f(a * b) \in f(A)$ ، أي $\exists T y \in f(A)$

وبالتالي : $f(A)$ جزء مستقر من (F, T) .

25 ليكن f تشاكل من $(E, *)$ نحو (F, T) .

نضع : $C = \{a \in E \mid \forall x \in E : a * x = x * a\}$

$C' = \{b \in F \mid \forall y \in F : b T y = y T b\}$

المجموعة C تسمى مركز $(E, *)$ و C' تسمى مركز (F, T)

(1) بين أن : $f^{-1}(C') \subset C$ $\Rightarrow f$ تباليغي.

(2) بين أن : $f(C) \subset C'$ $\Rightarrow f$ شمولي.

الجواب : (1) نفترض أن f تباليغي.

لدينا : $x \in f^{-1}(C') \Leftrightarrow f(x) \in C'$

ليكن x من $\bar{f}^{-1}(C')$ و y من E لدينا:

$$\begin{aligned} f(x * y) &= f(x) \tau f(y) \quad ((E, \tau) \text{ هو } (F, \tau)) \\ &= f(y) \tau f(x) \quad (\text{لأن } f(x) \in C') \end{aligned}$$

$$f(x * y) = f(y * x)$$

$$\forall y \in E \quad x * y = y * x \quad \text{و بما أن } f \text{ بياضي فإن}$$

$$x \in C$$

$$\text{وبالتالي: } \bar{f}^{-1}(C') \subset C$$

(نفترض أن f شمولي).

$$\text{لدينا: } x' \in f(C) \Leftrightarrow \exists x \in C : x' = f(x)$$

لكل y من F يوجد y من E حيث $y' = f(y)$ (لأن f شمولي من E إلى F)

$$x' \tau y' = f(x) \tau f(y) = f(x * y)$$

$$= f(y * x) \quad (\text{لأن } x \in C)$$

$$= f(y) \tau f(x)$$

$$\forall y' \in F \quad x' \tau y' = y' \tau x' \quad \text{إذن}$$

$$x' \in C' \quad \text{وهو}$$

$$\text{وبالتالي: } f(C) \subset C'$$

26

نعرف على \mathbb{N} العمليات التركيب الداخلي * بماتري

$$\forall y \in \mathbb{N} \quad 0 * y = y + 1 \quad \text{أ-}$$

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad (x + 1) * 0 = x + 1 \quad \text{ب-}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad (x + 1) * (y + 1) = x * [(x + 1) * y] \quad \text{ج-}$$

$$(2) \text{ أحسب: } 0 * 0, 0 * 1, 1 * 0, 1 * 1, 1 * 2, 2 * 0, 2 * 1, 2 * 2$$

$$(3) \text{ بين أن: } \forall n \in \mathbb{N} : 1 * n = n + 2$$

$$(3) \text{ بين أن: } \forall n \in \mathbb{N} : 2 * n = 2n + 3$$

$$(4) \text{ ليكن (م) المسألة العددية المعروفة بماتري } \forall n \in \mathbb{N} : 3n = 3 * n$$

أ- أحسب: م(0).

$$\text{ب- بين أن: } \forall n \in \mathbb{N} : 3n + 2 = 2 * n + 3$$

الجواب : (1) لدينا حسب (أ) $\forall y \in \mathbb{N} : 0 * y = y + 1$

بأخذ $y = 0$ نحصل على : $0 * 0 = 0 + 1 = 1$

وبأخذ $y = 1$ نحصل على : $0 * 1 = 1 + 1 = 2$

وبأخذ $x = 0$ في (ب) نحصل على : $1 * 0 = 0 * 1 = 2$

وبأخذ $x = y = 0$ في (ج) نحصل على : $1 * 1 = 0 * [1 * 0]$

$$= 0 * 2 = 2 + 1 = 3$$

وبأخذ $x = 1$ في (ب) نحصل على : $2 * 0 = 1 * 1 = 3$

(2) لنثبت أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 * n = n + 2$

بالترجع : - من أجل $n = 0$ لدينا : $1 * 0 = 0 + 2 = 2$ الحالة بسيطة .

- نفترض أن : $1 * n = n + 2$ ونثبت أن : $1 * (n+1) = n + 3$

حسب (ج) بأخذ : $y = n$ و $x = 0$ نحصل على :

$$1 * (n+1) = 0 * [1 * n] = 0 * (n+2)$$

$$= (n+2) + 1 \quad (\text{حسب (أ)})$$

$$= n + 3 \quad \text{وهذا :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 * n = n + 2 \quad \text{وبالتالي :}$$

(3) لنثبت بالترجع أن : $2 * n = 2n + 3$

من أجل $n = 0$ لدينا : $2 * 0 = 3 = 2 * 0 + 3$ الحالة بسيطة

- نفترض أن : $2 * n = 2n + 3$ ونثبت أن : $2 * (n+1) = 2n + 5$

لدينا بأخذ : $y = n$ و $x = 1$ في (ب) نحصل على :

$$2 * (n+1) = 1 * [2 * n] = 2 * (2n+3)$$

$$= (2n+3) + 2$$

$$2 * (n+1) = 2n + 5 \quad \text{وهذا :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2 * n = 2n + 3 \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : 3 * n = 3n + 4 \quad (4) \text{ لدينا :}$$

$$3 * 0 = 3 * 0 = (2 * 1) * 0 = 2 * 1 = 2 * 1 + 3 = 5 \quad \text{لدينا :}$$

$$3 * (n+1) = 3 * (n+1) = (2 * 2) * (n+1) \quad \text{لدينا :}$$

$$3 * (n+1) = 2 * [3 * n] = 2 * (3n+4) + 3 \quad \text{وبالتالي :}$$

لتكن E مجموعة هوددة بقانونين تركيب داخليين $*$ و T .

و ليكن e_1 العنصر المعاييد للقانون $*$.

و ليكن e_2 العنصر المعاييد للقانون T .

نفترض أن لكل $x, y, u, v \in E$:

$$(R) : (x * y) T (u * v) = (x T u) * (y T v)$$

(1) بين أن : $e_1 = e_2$.

(2) بين أن : $\forall (x, v) \in E^2 : x T v = x * v$.

(3) بين أن القانونين T و $*$ متبادليين وتجميعيين.

الاجاب : (1) سيطر العلاقة (R) ، وذلك بأخذ $x = v = e_2$ و $y = u = e_1$.

$$\text{نحصل على : } (e_1 * e_2) T (e_2 * e_1) = (e_2 T e_2) * (e_1 T e_1)$$

$$\text{وبما أن : } e_2 * e_2 = e_2 \quad \text{و} \quad e_2 T e_1 = e_2$$

$$e_1 * e_2 = e_2 \quad \text{و} \quad e_1 T e_2 = e_1$$

$$\text{فإن : } e_2 = e_1 \quad \text{و} \quad e_2 T e_2 = e_2 * e_2$$

(2) سيطر العلاقة (R) ، وذلك بأخذ $y = u = e_1$.

$$\text{نحصل على : } (x * e_2) T (e_2 * v) = (x T e_2) * (e_2 T v)$$

وبما أن e_2 هو العنصر المعاييد للقانونين T و $*$

$$x T v = x * v$$

(3) من خلال الأسئلة السابقة نستنتج أن القانونين T و $*$ منطبقين

ومنه العلاقة (R) تصبح باسعمال القانون $*$ فقط

$$(R') : \forall (x, y) \in E^2 \quad (x * y) * (u * v) = (x * u) * (y * v)$$

$$\forall (u, v) \in E^2$$

وبأخذ $u = v = e_1$ نحصل على :

$$(e_2 * y) * (u * e_1) = (e_2 * u) * (y * e_1)$$

أي : $y * u = u * y$ ، ومنه $*$ قانون تبادلي.

في العلاقة (R') بأخذ $u = e_2$ نحصل على :

$$(x * y) * (e_2 * v) = (x * e_2) * (y * v)$$

$$(x * y) * v = x * (y * v)$$

أي : $*$ قانون تجميعي.

الزمرة

1 لنك ($G, *$) مجموعة مزودة بـ قانون تركيب داخلي $*$ تجميعي وقبل عنصر محايد e على اليمين .
نفرض أن كل عنصر من G يقبل معاكس على اليمين .
يبين أن ($G, *$) زمرة .

الجواب : ليكن x من G . نوجد x_d لمعاثل x على اليمين .

$$x * x_d = e \quad \text{لدينا .}$$

لدينا x_d في G ومنه x_d يقبل معاكساً x'_d على اليمين أي : $x_d * x'_d = e$

$$(x * x_d) * x'_d = x * (x_d * x'_d) \quad \text{ومنه :}$$

$$= x * e = x \quad (\text{لأن } e \text{ عنصر محايد على اليمين})$$

$$(x * x_d) * x'_d = e * x'_d \quad \text{وبما أن .}$$

$$e * x'_d = x \quad \text{فإن .}$$

$$x_d * x = x_d * (e * x'_d) = (x_d * e) * x'_d \quad \text{ولدينا .}$$

$$= x_d * x'_d$$

$$x_d * x = x_d * x'_d \quad \text{أي :}$$

$$x_d * x = e \quad \text{وبما أن :} \quad x_d * x'_d = e \quad \text{فإن .}$$

لأن : x_d هو معاكس x على اليسار .

$$ex = (x * x_d) * x \quad \text{ولدينا كذلك}$$

$$= x * (x_d * x) \quad (\text{لأن } * \text{ تجميعي})$$

$$e * x = x * e = x \quad (\text{لأن } e \text{ عنصر محايد على اليمين})$$

وبالتالي فإن e هو عنصر محايد على اليسار

لأن G يقبل عنصر محايد e وكل عنصر من G يقبل معاكساً وتجميعي

وبالتالي ($G, *$) زمرة .

2. مرود \mathbb{R}^2 بالعنود التركيب الداخلي T المعروف بمايلي:

لكل (x, y) و (x', y') من \mathbb{R}^2

$$(x, y) T (x', y') = (x + x', y e^{x'} + y' e^{-x})$$

نفس أن (\mathbb{R}^2, T) زمره غير تبادليه.

الجواب = * تجميعية T . ليكن (x, y) و (x', y') و (x'', y'') من \mathbb{R}^2

$$[(x, y) T (x', y')] T (x'', y'') = (x + x', y e^{x'} + y' e^{-x}) T (x'', y'')$$

$$= (x + x' + x'', (y e^{x'} + y' e^{-x}) e^{x''} + y'' e^{-(x+x')})$$

$$= (x + x' + x'', y e^{x'+x''} + y' e^{x''-x} + y'' e^{-(x+x')})$$

$$(x, y) T [(x', y') T (x'', y'')] = (x, y) T (x' + x'', y' e^{x''} + y'' e^{-x'})$$

$$= (x + x' + x'', (y e^{x''} + y' e^{-x'}) e^{x''} + y'' e^{x'+x''})$$

$$= (x + x' + x'', y' e^{x''-x} + y'' e^{-(x+x')} + y e^{x'+x''})$$

$$[(x, y) T (x', y')] T (x'', y'') = (x, y) T [(x', y') T (x'', y'')].$$

ومنه T تجميعية.

* العنصر المحايد لـ T . ليكن (e_1, e_2) عنصراً محايداً بالنسبة لـ T

لأن كل (x, y) من \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} (x, y) T (e_1, e_2) = (x, y) \\ (e_1, e_2) T (x, y) = (x, y) \end{cases}$$

$$(x, y) T (e_1, e_2) = (x, y) \Leftrightarrow (x + e_1, y e^{e_1} + e_2 e^{-x}) = (x, y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + e_1 = x \\ y e^{e_1} + e_2 e^{-x} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 e^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \end{cases}$$

$$(0, 0) T (x, y) = (x, y) \quad \text{لدينا لكل } (x, y) \text{ من } \mathbb{R}^2:$$

ومنه $(0, 0)$ هو العنصر المحايد بالنسبة للعنود T .

* العنصر المعاكس لـ T :

ليكن (x, y) من \mathbb{R}^2 . ليس أنه يوجد (x', y') من \mathbb{R}^2 بحيث:

$$(x, y) T (x', y') = (x', y') T (x, y) = (0, 0)$$

لدينا: $(x, y) T (x', y') = (0, 0) \Leftrightarrow (x + x', y e^{x'} + y' e^x) = (0, 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + x' = 0 \\ y e^{x'} + y' e^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ e^x (y + y') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

ولدينا كذلك: $(-x, -y) T (x, y) = (0, 0)$

ومن ثم $(-x, -y)$ مماثل (x, y) بالنسبة للقانون T وبالتالي (\mathbb{R}^2, T) زمرة.

بما أن: $(1, 0) T (1, 1) = (2, e)$ و $(1, 1) T (1, 0) = (2, e)$

فإن: $(1, 0) T (1, 1) \neq (1, 1) T (1, 0)$

ومن ثم T غير تبديلية.

وبالتالي (\mathbb{R}^2, T) زمرة غير تبديلية.

3 لنك (G, x) زمرة عيها المعابد e بحيث $\forall x \in G \quad x^3 = e$

(1) بين أن: $\forall (x, y) \in G^2 \quad (xy)^2 = y^2 x^2$

(2) بين أن: $\forall (x, y) \in G^2 \quad x y^2 x = y x^2 y$

الجواب: (1) لكل x و y من G لدينا:

$$\begin{aligned} y(xy)^2 x &= y x y x y x \\ &= (yx)(yx)(yx) \\ &= (yx)^3 = e = e \cdot e = y^3 x^3 \end{aligned}$$

ومن ثم: $y(xy)^2 x = y^3 x^3 = y(y^2 x^2)x$

وبما أن (G, x) زمرة فإن كل عنصر هو مستلهم

ومن ثم: $(xy)^2 = y^2 x^2$

(2) لكل x, y من G لدينا:

وحسب السؤال السابق: $x y^2 x y^2 = (x y^2)^2$

ومن ثم: $(x y^2)^2 = (y^2 x^2)^2$

ومن ثم: $x y^2 x y^2 = (y^2 x^2) x^2 = y x^2$

ومن ثم: $(e \cdot y) \cdot x^2 = y x^2$

ومن ثم: $(x y^2 x y^2) \cdot y = y x^2 y$

أي: $xy^2xy^3 = yx^2y$ ، منه: $xy^2x = yx^2y$ ($y^3 = e$)

4) ليكن $(G, *)$ زمرة عنصرها المعاكس e وليكن A جزء مستقر من G

وسمعي وغير فارغ $x^n = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ مراتب}}$ صح

(1) ليكن a من A ، بين أن $a^p = a^q$ $\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$

(2) استمع أن $e \in A$

(3) ليكن x من A ، بيا أن $x^{-1} = x^{s-1}$ $\exists s \in \mathbb{N}^*$

جيب: x^{-1} هو معاكس x بالنسبة للعنصر e

(4) استمع أن $(A, *)$ زمرة جزئية من $(G, *)$

الجواب: (1) لدينا: $a \in A$ و A جزء مستقر من G

ومنه: $\forall n \in \mathbb{N} \quad a^n \in A$

وبما أن A منتهية فإن

(2) لسا حسب الموال السابق: $a^p = a^q$ $\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$

نفرض أن $p > q$ إذن: $r = p - q \in \mathbb{N}$

ومنه: $a^p = a^q \Leftrightarrow a^{p-q} = e$

$\Leftrightarrow a^r = e$

وبما أن $a^r \in A$ فإن: $e \in A$

(3) ليكن x من A ، و $e \in A$ ، و A جزء مستقر من G

إذن: $\exists s \in \mathbb{N}^* : x^s = e$

إذا كان $s = 1$ فإن: $x = e$ و $x^{-1} = e$

إذا كان $s > 1$ فإن: $x^s = x^{s-1} * x = e$

ومنه: $x^{-1} = x^{s-1}$

(4) بيا أن A جزء مستقر من G و $A \neq \emptyset$ و $\forall x \in A : x^{-1} \in A$

فإن: $(A, *)$ زمرة جزئية من $(G, *)$.

5 نريد \mathbb{R} بالقانون تركب داخلي * المعروف بمبايلي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x * y = x + y + \frac{1}{2}xy$$

(1) أحسب : $\sqrt{2} * 3$, $(\frac{1}{2}) * (\frac{4}{5})$, $(-2) * 2$

(2) 1- هل القانون * تبادلي ؟

ب- هل القانون * تجميعي ؟

(3) بين أن القانون * يقبل عنصر محايد .

(4) حدد العناصر القابلة للمعكوسة بالقانون * .

(5) بين أن $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ جزء مغلق بالقانون * واستنتج أن $(\mathbb{R} \setminus \{-2\}, *)$ زمرة تبادلية .

(6) حل في \mathbb{R} المعادلة : $x + 2 = 1$

الاجاب : (1) ليس $(-2) * 2 = -2 + 2 + \frac{1}{2}(-2)2 = 0$

$$(\frac{1}{2}) * \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})(\frac{4}{5}) = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{2} * 3 = \sqrt{2} + 3 + \frac{1}{2}(\sqrt{2})3 = \frac{5}{2}\sqrt{2} + 3$$

(2) 1- لكل x و y من \mathbb{R} ليس :

$$x * y = x + y + \frac{1}{2}xy = y + x + \frac{1}{2}yx \quad (x, y \text{ تبادلي في } \mathbb{R})$$

$$x * y = y * x$$

إذن :

ومنه : القانون * تبادلي .

ب- لكل x و y و z من \mathbb{R} ليس :

$$(x * y) * z = (x * y) + z + \frac{1}{2}(x * y)z$$

$$= x + y + \frac{1}{2}xy + z + \frac{1}{2}(x + y + \frac{1}{2}xy)z$$

$$= x + y + z + \frac{1}{2}xz + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{4}xyz$$

$$* (y * z) = x + (y * z) + \frac{1}{2}x(y * z)$$

$$= x + y + z + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}x(y + z + \frac{1}{2}yz)$$

$$= x + y + z + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xz + \frac{1}{4}xyz$$

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad \text{ومنه : القانون * تجميعي .}$$

(3) ليكن e عنصر محايد بالقانون $*$ وليسا $*$ تبادلي. إذن :

$$\forall x \in R : x * e = x \Leftrightarrow \forall x \in R : x + e + \frac{1}{2}xe = x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in R : (\frac{1}{2}x + 1)e = 0 \Leftrightarrow e = 0$$

ومنه : 0 هو العنصر المحايد بالقانون $*$.

(5) ليكن x من R , قابل للمماثلة بالقانون $*$, إذن يوجد x' من R

$$x * x' = 0 \quad \text{بحيث :} \quad (x' * x \text{ تبادلي})$$

$$x + x' + \frac{1}{2}xx' = 0$$

$$x'(x + 2) = -2x$$

إذا كان : $x = -2$ فإن : $0 = 4$ غير ممكن , منه $x \neq -2$ غير قابل

للمماثلة بالقانون $*$.

$$x' = \frac{-2x}{x+2} \quad \text{فإن :} \quad x \neq -2$$

ومنه مجموعة العناصر القابلة للمماثلة بالقانون $*$ هي $R - \{-2\}$

(5) لنبين أن $R - \{-2\}$ جزء مستقر بالقانون $*$.

ليكن x و y عنصريين من $R - \{-2\}$ لدينا :

$$x * y = x + y + \frac{1}{2}xy$$

$$x * y + 2 = x + 2 + \frac{1}{2}y(x + 2) = \frac{1}{2}(x + 2)(y + 2)$$

$$x * y + 2 \neq 0 \quad \text{فإن} \quad x \neq -2 \quad \text{و} \quad y \neq -2$$

$$x * y \in R - \{-2\} \quad \text{أي :} \quad x * y \neq -2$$

وبالتالي : $R - \{-2\}$ جزء مستقر بالقانون $*$.

بما أن $*$ قانون تركيب داخلي في $R - \{-2\}$, تبديلي , تجميعي , فكل

عنصر محايد 0 وكل عنصر من $R - \{-2\}$ قابل للمماثلة $*$

فإن : $(R - \{-2\}, *)$ زوجة تبادلية.

$$(6) \text{ نحل في } R \text{ المعادلة :} \quad x * 2 = 1 \quad \text{ليكن} \quad 2^2 = -1$$

مماثل 2 بالقانون $*$.

$$x * 2 = 1 \Leftrightarrow (x + 2) + 2^2 = 1 + 2^{-1} \Leftrightarrow x + (2 + 2^2) = 1 + 2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + 2^{-1} = \frac{5}{4} \quad \text{ومنه :} \quad S = \{\frac{5}{4}\}$$

6

لنك (G, \circ) زمرة منتهية عندها المعاييد e بحيث ،

$$\text{card } G = 2n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

نفترض أنه توجد n مرتين حركيتين H و K يخفطان مايلي :

$$K \neq H \quad \text{و} \quad K \cap H = \{e\} \quad 1-$$

$$\text{card } H = \text{card } K = n \quad \text{ب-}$$

$$\exists \alpha \in G : G = H \cup K \cup \{\alpha\} \quad (1) \text{ بين أن :}$$

$$b \in H - \{e\} \quad \text{و} \quad a \in K - \{e\} \quad (2) \text{ ليكن}$$

$$ab \notin H \quad \text{و} \quad ab \notin K \quad 1-\text{بين أن :}$$

$$ab = \alpha \quad \text{ب- استنتج أن :}$$

$$n = 2 \quad \text{ج- استنتج أن :}$$

(3) حدد جدول القانون .

$$\exists \alpha \in G : G = H \cup K \cup \{\alpha\} \quad \text{الجواب : (1) ليكن أن :}$$

$$\text{card}(H \cup K) = \text{card } H + \text{card } K - \text{card}(H \cap K) \quad \text{لدينا :}$$

$$= n + n - 1$$

$$\text{card}(H \cup K) = 2n - 1 \quad \text{ومنه ،}$$

$$\exists \alpha \in G : G = H \cup K \cup \{\alpha\} \quad \text{وبما أن } \text{card } G = 2n \quad \text{فليكن :}$$

$$\alpha \notin H \cup K \quad \text{بحيث ،}$$

$$ab \in K \quad (2) 1-\text{الروما بالمثل : يعرض أن}$$

$$\text{بما أن } b = \alpha^{-1}(ab) \quad \text{حيث } \alpha^{-1} \text{ مماثل } \alpha \text{ بالنسبة للقانون .}$$

$$(3) \text{ ليكن } (G, \circ) \text{ زمرة}$$

$$\text{لدينا} \quad ab \in K \quad \text{و} \quad a^2 \in K \quad (4) \text{ لأن } K \text{ زمرة جزئية من } (G)$$

$$\text{ومنه :} \quad b \in K \quad \text{و} \quad b \in H \quad \text{و} \quad b \in K \quad \text{و} \quad b \in H$$

$$\text{وبالتالي} \quad b \in H \cap K = \{e\} \quad \text{أي} \quad b = e \quad \text{وهذا تناقض مع كون } b \neq e$$

$$\text{لذا :} \quad ab \notin H \quad \text{وبالمثل} \quad ab \notin K$$

$$G = H \cup K \cup \{\alpha\} \quad \text{ب- ليكن ،}$$

$$ab = \alpha \quad \text{بما أن} \quad ab \notin K \quad \text{و} \quad ab \notin H \quad \text{فليكن :}$$

ج - لوئنا : $\text{Card } G = 2n$ و $n \in \mathbb{N}^*$

لوئنا : $n \neq 1$ لأن : $G = \text{HUKU}\{x\}$

نفرض أن $n \geq 2$ أي : $n \geq 3$ ، ومنه : $\text{Card } G \geq 6$

$$\exists (\alpha_0, \beta_0) \in (H \setminus \{e\})^2, \exists \gamma_0 \in K \setminus \{e\}, \alpha_0 \neq \beta_0$$

إذاً حسب السؤال السابق : $\alpha_0 \gamma_0 = \alpha$ و $\beta_0 \gamma_0 = \alpha$

$$\alpha_0 \gamma_0 = \alpha \Rightarrow \alpha_0 = \beta_0 \quad \text{أي :}$$

وهذا تناقض مع كون $\alpha_0 \neq \beta_0$

ومنه : $n = 2$

(3) جدول القانون :

بما أن $n = 2$ فإن $\text{Card } G = 4$

ومنه : $G = \{e, \alpha, \beta, \gamma\}$

مع : $K = \{e, \beta\}$ و $H = \{e, \alpha\}$

لدينا : $\alpha\beta = \gamma$; $\alpha\gamma = \beta$, $\beta^2 = \gamma^2 = \alpha^2 = e$, $\alpha = \beta\gamma = \gamma\beta$

.	e	α	β	γ
e	e	α	β	γ
α	α	e	γ	β
β	β	γ	e	α
γ	γ	β	α	e

ليكن (G, \cdot) زمرة بنى دالية وعناصرها المعاكس e

ليكن a من G نعرّف : $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ و $a^0 = e$

ليكن a و b عنصران من G بحيث :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \exists k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : a^n = e \text{ و } b = a^k$$

$$G_1 = \{x \in G \mid \exists p \in \mathbb{Z} : x = a^p\} \quad \text{نضع :}$$

$$G_2 = \{x \in G \mid \exists q \in \mathbb{Z} : x = b^q\}$$

(1) بين أن (G_1, \cdot) و (G_2, \cdot) زمرةان جزئيتان من (G, \cdot)

(2) بين أن $n \wedge k = 1 \Rightarrow G_1 = G_2$

الجواب : (1) لدينا ، $G_2 \neq \emptyset$ ، لأن $e \in G_2$ ($e = a^0$)
 ليكن x و y من G_2 ، لأن : $x = a^{p_1}$ و $y = a^{p_2}$ ، $\exists (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$:
 ومنه ،

$$xy^{-1} = a^{p_1} \cdot (a^{p_2})^{-1}$$

$$= a^{p_1} \cdot a^{-p_2} = a^{p_1 - p_2}$$
 وبما أن $p_1 - p_2 \in \mathbb{Z}$ ، فإن : $xy^{-1} \in G_2$
 وبالتالي (G_2, \cdot) زمرة جزئية من (G, \cdot) .
 وبالمثل نثبت أن لكل x و y من G_2 : $xy^{-1} \in G_2$
 ومنه (G_2, \cdot) زمرة جزئية من (G, \cdot) .
 (2) نفترض أن $n \wedge k = 1$ ، ونثبت أن : $G_1 = G_2$.
 لدينا ،

$$x \in G_2 \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : x = a^p$$

$$\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : x = (a^k)^q \quad (b = a^k)$$

$$\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : x = a^{kq}$$

$$\Rightarrow x \in G_1 \quad (\text{بأخذ } p = kq)$$
 ومنه ، $G_2 \subset G_1$.
 لنثبت أن : $G_1 \subset G_2$.
 لـ $x \in G_1$: $x = a^p$ ، $\exists p \in \mathbb{Z}$: $x \in G_1 \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : x = a^p$
 بما أن : $n \wedge k = 1$ ، فإن حسب مبرهنة Bezout :
 $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 : \alpha n + \beta k = 1$

$$p = \alpha n + \beta k$$
 ومنه ،

$$x = a^p = a^{\alpha n + \beta k}$$
 إذن ،

$$x = (a^n)^{\alpha} \cdot (a^k)^{\beta}$$

$$x = (e)^{\alpha} \cdot (b)^{\beta} \quad (a^n = e \text{ و } a^k = b)$$

$$x = b^{\beta}$$
 ومنه ، $x \in G_2$ ، لأن $x \in G_2$ ،
 وبالتالي : $G_1 = G_2$.

8

ليكن G زمرة جزئية من $(\mathbb{C}, +)$ بحيث:

$$\forall x \in [0, 1] : x + ix^2 \in G$$

$$\forall x \in [0, 1] : (2x-1)(1+i) \in G \quad (1) \text{ بمأن}$$

$$\forall x \in [0, 1] : x + ix \in G \quad (2) \text{ استمع أن}$$

$$\forall x \in [0, 1] : x - x^2 \in G \quad (3) \text{ بمأن}$$

$$[0, \frac{1}{4}] \subset G \quad (4) \text{ استمع أن}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{Z} \exists y \in [0, \frac{1}{4}] : x = ny \quad (5) \text{ بمأن}$$

$$\mathbb{R} \subset G \quad (6) \text{ استنتج أن}$$

$$\forall x \in [0, 1] : 1(x-x^2) \in G \quad (7) \text{ بمأن}$$

$$\mathbb{C} = G \quad (8) \text{ بمأن}$$

الجواب : (1) ليكن x من $[0, 1]$ لدينا :

$$(1-x) + i(1-x)^2 \in G \quad \text{بمأن } 1-x \in [0, 1] \text{ فإن:}$$

$$x + ix^2 - (1-x) - i(1-x)^2 \in G \quad \text{ومنه:}$$

$$x + ix^2 - 1 + x - i + i(1-x)^2 + i(1-x)^2 \in G \quad \text{أي:}$$

$$2x(1+i) - (1+i) \in G \quad \text{ومنه:}$$

$$(2x-1)(1+i) \in G \quad \text{أي:}$$

$$(2) \text{ لدينا التطبيق } \varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ "قابل"} \\ x \mapsto 2x-1$$

$$\forall x \in [-1, 1] \exists ! t \in [0, 1] : x = 2t-1 \quad \text{اذن:}$$

$$(2x-1)(1+i) \in G \quad \text{وبمأن:}$$

$$x(1+i) \in G \quad \text{فإن:}$$

$$\forall x \in [0, 1] : x(1+i) \in G \quad \text{وبالخصوص:}$$

$$\begin{cases} x + ix^2 \in G \\ x^2 + ix^2 \in G \end{cases} \Rightarrow x - x^2 \in G \quad \text{بكل } x \text{ من } [0, 1] \text{ لدينا:}$$

$$(4) \text{ التطبيق } h : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{4}] \text{ شعولي} \\ x \mapsto x - x^2$$

$$\forall x \in [0, \frac{1}{4}] \exists ! t \in [0, 1] : x = t - t^2 \quad \text{ومنه:}$$

$$x \in G \quad \text{بمأن } t \in [0, 1] \text{ فإن: } t - t^2 \in G \quad \text{أي}$$

وبالتالي : $[0, 1] \subset G$

(5) ليكن x من \mathbb{R} ، نضع : $n = [4x] + 1$ ($x \neq 0$)

لدينا : $n > 4x$ و x و n لهما نفس الإشارة .

ومنه : $\frac{x}{n} \leq \frac{1}{4}$ أي : $\frac{x}{n} \in]0, \frac{1}{4}]$

و نضع $y = \frac{x}{n}$ نحصل على $x = ny$ مع $y \in]0, \frac{1}{4}]$

إذا كان $x = 0$ نعتبر $n = 0$ و $y = 0$

وبالتالي : $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{Z} \exists y \in [0, \frac{1}{4}] : x = ny$

(6) ليكن x من \mathbb{R} حسب السؤال (5) $\exists n \in \mathbb{Z} \exists y \in [0, \frac{1}{4}] : x = ny$

وبما أن $y \in [0, \frac{1}{4}]$ فإن : $y \in G$ ومنه : $y + y + \dots + y \in G$

أي : $x \in G$ n مرة

وبالتالي : $\mathbb{R} \subset G$

(7) ليكن x من $[0, 1]$ لدينا : $\begin{cases} x + ix^2 \in G \\ x + ix \in G \end{cases} \Rightarrow i(x - x^2) \in G$

(8) لدينا : $G \subset \mathbb{C}$

لنثبت أن : $\mathbb{C} \subset G$

لدينا : $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : z = x + iy$

بما أن : $\begin{cases} x \in G \\ ix \in G \end{cases}$ فإن : $\begin{cases} x \in G \\ ix \in G \end{cases}$

إذن : $x + ix \in G$ ومنه : $z \in G$

إذن : $\mathbb{C} \subset G$

وبالتالي : $\mathbb{C} = G$

9 ليكن (G, \cdot) زمرة و H, K زميرتين جزئيتين من G .

سأثبت أن : $H \cup K = G \Leftrightarrow H = G$ أو $K = G$

الجواب : (\Leftarrow) إذا كان $K = G$ أو $H = G$ فإن $H \cup K = G$

لأن : $H \subset G$ و $K \subset G$

(\Rightarrow) نعرض أن $H \cup K = G$ ، سأثبت أن $H = G$ أو $K = G$

البرهان بالcontradiction . $H \neq K$ و $H \neq G$

لأن: $\exists (x, y) \in G^2 : x \notin H \text{ و } y \notin K$

بما أن: $H \cup K = G$ فإن: $y \in H \text{ و } x \in K$

لدينا: $(x, y) \in G^2 \Rightarrow xy \in G = H \cup K$

$\Rightarrow xy \in H \text{ أو } xy \in K$

الحالة 1: إذا كان $xy \in K$ نعمل على:

$\begin{cases} xy \in K \\ x \in K \end{cases} \Rightarrow y = x^{-1} \cdot (xy) \in K$
وهذا ما مضى مع كون $y \notin K$

الحالة 2: إذا كان $xy \in H$ نعمل على:

$\begin{cases} xy \in H \\ y \in H \end{cases} \Rightarrow x = (xy) \cdot y^{-1} \in H$
وهذا ما مضى مع كون $x \notin H$

وبالتالي $H \cup K = G \Rightarrow H = G \text{ أو } H = K$

10 لنك (G, \cdot) زمرة متناهية وليكن x من G و A جزء من G

نص: $\tilde{A}x = \{a^{-1}x \mid a \in A\}$

1. ب. أ. ن: $\text{card } \tilde{A}x = \text{card } A$

2. ليكن B جزء من G بحيث $\text{card } A + \text{card } B > \text{card } G$

أ- ب. أ. ن: $\forall x \in G (\tilde{A}x) \cap B \neq \emptyset$

ب- استنتاج أ. ن: $\forall x \in G \exists (a, b) \in A \times B : x = ab$

الجواب: 1. نعتبر التطبيق $\varphi: A \rightarrow \tilde{A}x$

$a \mapsto a^{-1}x$

لدينا φ شمولي وذلك حسب بناء التطبيق φ .

ليكن a_1 و a_2 عنصريين من A لدينا:

$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) \Rightarrow a_1^{-1}x = a_2^{-1}x$
 $\Rightarrow a_1^{-1} = a_2^{-1}$ (لأن كل عنصريين من G مختلفين)
 $\Rightarrow a_1 = a_2$

ومنه φ تبائيبي.

وبالتالي φ تقابل من A نحو $\tilde{A}x$ ومنه: $\text{card } A = \text{card } \tilde{A}x$

١٢) - لدينا $\text{card} A + \text{card} B > \text{card} G$ وبما أن لكل x من G لدينا $\text{card} A = \text{card} A^{-1}x$ فإن $\text{card} A^{-1}x + \text{card} B > \text{card} G$ بمصرح أن $\text{card} A^{-1}x \cap B = \emptyset$ لأن $\text{card} A^{-1}x \cap B = 0$ وبما أن $(A^{-1}x) \cup B \subset G$ فإن $\text{card}(A^{-1}x) + \text{card} B - \text{card}(A^{-1}x \cap B) \leq \text{card} G$ أي $\text{card}(A^{-1}x) + \text{card} B \leq \text{card} G$ وهذا لا يتفق مع كون $\text{card}(A^{-1}x) + \text{card} B > \text{card} G$ وبالتالي $\forall x \in G : A^{-1}x \cap B \neq \emptyset$ بـ. ليكن x من G لدينا $A^{-1}x \cap B \neq \emptyset$ ومنه $\exists b \in G : b \in A^{-1}x \cap B \Leftrightarrow b \in A^{-1}x \text{ و } b \in B$ لأن $\exists a \in A : b = a^{-1}x$ وبالتالي $\exists (a, b) \in A \times B : x = ab$

لنكن (G, \cdot) زمرة منتهية، لنكن H زمرة جزئية من G

11

$$\text{card} H > \frac{1}{2} \text{card} G$$

نريد

$$H = G$$

من أن

الجواب : نفترض أن $H \neq G$ ، لأن يوجد x من G بحيث $\exists x \in G : x \notin H$

عبر التماثل f من H نحو Hx نكتب $f(x) = tx$

$$Hx = \{tx : t \in H\}$$

مع :

لدينا f تقابل من H نحو Hx ومنه $\text{card} H = \text{card} Hx$

وبالتالي $\text{card} Hx + \text{card}(H) - 2\text{card} H > \text{card} G$

$$(Hx) \cap H \neq \emptyset$$

ومنه

$$\exists y \in Hx \cap H : \text{أي } \exists y \in Hx \cap H$$

لأن

$$x = t^{-1}y : \text{ومنه } \exists t \in H : y = tx$$

لأن

$$\begin{cases} t \in H \\ y \in H \\ H \text{ زمرة جزئية من } G \end{cases}$$

وبما أن

نباين : $x \notin H$ ، وهذا متناقض مع كون $x = \bar{y} \cdot y \in H$ ، وبالنسبة ، $H = G$

12 لنكن (E, \cdot) مجموعة غير رỗng ذاتون التركيب الداخلي ، ولكن e عنصرها من E بحيث أن

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (x \cdot y) \cdot z = (y \cdot z) \cdot x \quad (1)$$

$$\forall x \in E : x \cdot e = x \quad (2)$$

$$\forall x \in E \exists x' \in E \quad x \cdot x' = e \quad (3)$$

(1) من أن القانون ، متبادلي

(2) من أن (E, \cdot) ، مجموعة ، متبادلي

الجواب : (1) ليكن x, y من E لدينا :

$$y \cdot x = (y \cdot x) \cdot e \quad (\text{حسب (2)})$$

$$y \cdot x = (x \cdot e) \cdot y \quad (\text{حسب (2)})$$

$$y \cdot x = x \cdot y \quad (\text{حسب (2)})$$

ومن القانون ، متبادلي .

(2) لدينا لكل x, y من E ،

$$(x \cdot y) \cdot z = (y \cdot z) \cdot x$$

$$= x \cdot (y \cdot z) \quad (\text{لأن ، متبادلي})$$

ومن القانون ، يتبع .

ليكن x من E لدينا حسب (3) :

$$\exists x' \in E : x \cdot x' = e$$

$$\exists x'' \in E : x \cdot x'' = e$$

$$e \cdot x = e \cdot (x \cdot e) \quad \text{وليس}$$

$$= (e \cdot x) \cdot e$$

$$= (e \cdot x) \cdot (x' \cdot x'')$$

$$= e \cdot (xx') \cdot x''$$

$$= (e \cdot e) \cdot x''$$

$$e \cdot x = e \cdot x'' \quad \text{ومن هنا :}$$

$$xx' = (x \cdot e) \cdot x \quad \text{وليس}$$

$$= x' \cdot (e \cdot x)$$

$$= x' \cdot (e \cdot x'')$$

$$= x' \cdot x'' = e$$

$$e.x = (xx').x = x(xx'.x) \quad \text{ولدينا :}$$

$$e.x = x.e = x$$

وبالتالي e عنصر محايد للعناصر x ، وكل عنصر x قابل معكاف
منه ، $(e, 0)$ زمرة تبديلية.

$$G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \quad \text{مع} \quad 13$$

نوجد $(G, *)$ قانون التراكيب الداخلي $*$ المعروف بماتري

$$\forall (x, y) \in G, \forall (x', y') \in G \quad (x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

(1) من أ. $(G, *)$ زمرة عكس ذاتية

(2) من أ. $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ زمرة حرة من G

الاجواب (1) - نضع (x', y') ليكن (x, y) و (x'', y'') من G

$$\begin{aligned} [(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') &= (xx', xy' + y) * (x'', y'') \\ &= (xx'x'', xx'y' + xy' + y'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')] &= (x, y) * (x'x'', x'y' + y'') \\ &= (xx'x'', xy' + y' + x'y' + y'') \end{aligned}$$

$$[(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') = (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')] \quad \text{اذن :}$$

منه القانون $*$ تجميعي.

- العنصر المحايد لـ $*$: ليكن (a, b) عنصر محايد لـ $*$

اذن لكل (x, y) من G لدينا :

$$(a, b) * (x, y) = (x, y) \quad \text{و} \quad (x, y) * (a, b) = (x, y)$$

$$(a, b) * (x, y) = (x, y) \Leftrightarrow (ax, ay + b) = (x, y) \quad \text{لذا}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax = x \\ ay + b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)x = 0 \\ (a-1)y + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow e = (1, 0)$$

وبماتري $(x, y) * (1, 0) = (x, y)$ ، و $(1, 0)$ هو العنصر المحايد للعناصر x

- العنصر المماثل (بلك) (x, y) من G . لجدد مماثل (x, y) بالقانون *
أي نحل المعادلتين ذات المجهول (x', y') :

$$(x, y) * (x', y') = (1, 0) \quad \text{و} \quad (x', y') * (x, y) = (1, 0)$$

$$\text{أي} \quad \begin{cases} (xx', yy' + y) = (1, 0) \\ (x'x, yy' + y') = (1, 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xx' = 1 \\ xy' + y = 0 \\ x'y + y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \\ y' = -\frac{y}{x} \end{cases}$$

بالتالي كل عنصر (x, y) من G يبل مماثل هو $(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x})$ ،
ولنأخذ : $(2, 0) * (1, 1) = (2, 1)$ ؛ $(1, 1) * (2, 0) = (2, 1)$ ،

$$(1, 1) * (2, 0) \neq (2, 0) * (1, 1) \quad \text{لذا ،}$$

وهذا القانون * غير تبادلي .

وبالتالي $(G, *)$ زمرة غير ساذجة

$$(1, 0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad \text{لذا} \quad \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \neq \emptyset$$

بررود $(x, y)^{-1}$ لمماثل (x, y) في G

$$\text{لكل } (x, y) \text{ من } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \text{ لذا} \quad (x, y)^{-1} = (\frac{1}{x}, -\frac{y}{x})$$

$$\text{بما أن } x > 0 \text{ فإن } \frac{1}{x} > 0$$

$$\text{مع } (x, y)^{-1} \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

لكل (x, y) و (x', y') من $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ لنأخذ :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad (xx' > 0)$$

وبالتالي $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, *)$ زمرة حرة للزمرة $(G, *)$.

برود \mathbb{R} مغاوب التركيب الداخلي * المعروف بمائلي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x * y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$$

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{عكس التماثل } f \text{ من } \mathbb{R} \text{ نحو } \mathbb{R} \text{ بمائلي}$$

1- من أن f تماثل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R}

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) * f(y)$$

2) استنتج بنية المجموعة $(\mathbb{R}, *)$.

الجواب : (1) 1- لدينا f متصلة وقابلة للتفاضل على \mathbb{R} :

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

ومنه f متصلة ومرتبة فليعلم ان \mathbb{R} مأد f تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} و $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

ب- ليكن x, y من \mathbb{R} لدينا $f(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$

$$f(x) * f(y) = f(x) \sqrt{1+f^2(y)} + f(y) \sqrt{1+f^2(x)}$$

$$1 + f^2(y) = 1 + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y}}{4}$$

$$= \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)^2$$

$$\sqrt{1+f^2(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ومنه :

$$f(x) * f(y) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{1}{4} (2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}) = \frac{1}{2} (e^{x+y} - e^{-(x+y)})$$

ومنه :

$$f(x+y) = f(x) * f(y)$$

ومنه :

(2) لدينا f تشارك بخاصية من $(\mathbb{R}, +)$ نحو $(\mathbb{R}, *)$

وسأان $(\mathbb{R}, +)$ زمرة تبادلية خیار $(\mathbb{R}, *)$ زمرة تبادلية.

ليكن (E, \cdot) مجموعة مبرودة بخاصية مركب داخلية .

15

$$x^2 \cdot y = y \quad 5 \quad yx^2 = y$$

بجيب :

(1) بين أن (E, \cdot) بقفل غير معاند

$$\forall x \in E \quad x \cdot x = e$$

(2) بين أن

(3) استنتج أن (E, \cdot) زمرة تبادلية .

الجواب : (1) ليكن e من E لدينا : $e^2 \in E$ (لأن قانون مركب داخلية)

$$e = e^2 \quad \exists e \in E$$

ومنه

$$e^2 \cdot x = x \quad e^2 = x$$

لدينا لكل x من G يجب

$$e \cdot x = x \cdot e = x$$

أي .

وبالتالي $e = e^2$ عندهم معايد للقانون .

$$x \cdot x = x^2 \cdot e = x \cdot (x \cdot e) = e \cdot (x \cdot e) = x$$

(2) ليكن x من E لدينا .

وبالتالي كل عنصر من E يقبل معاشل هو نفسه
(3) لدينا E القانون - تجميعي ، e عنصر محايد ، كل عنصر يقبل معاشل
ومنه $(E, 0)$ زمرة .

لېښان . قانون قیادلی .

بیکت = و ی من ۴ لرینا :

$$y \cdot x = e \cdot (y \cdot x) \cdot e$$

$$= x^2(y, x) y^2 \quad (x^2 = y^2 = e \quad : \text{in } A)$$

$$= x(xy) \cdot (xy) = x(xy) \cdot (xy)y$$

$$= x(xy)^2 y = xey \quad ((xy)^2 = e \text{ in } G)$$

$$y \cdot x = xy$$

إذا كان القانون - قباولي

و ما الى (E,.) من اجل

16. اكتب (G, \cdot) من G مجموعة دوال $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ من الشكل $f(x) = ax + b$ ، $a, b \in \mathbb{R}$ ، $a \neq 0$.

١٠. G ، عنصر a ، لذلك a من K ، عنصر a من a ، العنصر a من K

$$T_0(x) = \Delta x \quad \cdot \quad \text{for } x \in [0, 1]$$

ملفوظات، ۱، ۱۰۸ (۱)

(2) $\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \frac{1}{G_1 + G_2}$

الجواب : (1) ليكن x و y عن k لدينا :

$$\gamma_0(x) = \gamma_0(y) \Rightarrow \exists z = 1 \quad y \Rightarrow x \quad \lambda \quad \left(\begin{array}{c} \text{def } G \quad , \quad \lambda \\ \text{def } G = 1, \text{ def } (G) \end{array} \right)$$

وہو ۴ طرفہ لائی

(2) Ba^{2+} ك حوضه حوضه ، SO_4^{2-} با سى با سى K_2SO_4

فِيان هَا تَقَابَلِي .

ليكن a من K ، ليثبت أن $a^{-1} \in K$

لذا $\alpha \in K$ ، بمثل γ_α قابل $\gamma_\alpha(x) = 0$ $\forall x \in K$

أي: $a.x = a = a.e$ ، وبما أن a من G فإن e منتظم

ومنه $x=e$ إذ $e \in K$

مما أن α شعوي فإن $\exists a_1 \in K : \forall a(a_1 = a \cdot a_2 = e$

ومنه : $a_1 = a^{-1}$

مما أن $a_2 \in K$ فإن : $a^{-1} \in K$

ومما أن K حرة حسمر من G فإن $(K, 0)$ زمرة جزئية من $(G, +)$

17 (1) من أنه لا يوجد مشاكل تقابلي من الزمرة $(Q; +)$ نحو

الزمرة (Q^*, \times)

(2) من أنه لا يوجد مشاكل تقابلي من الزمرة (R^*, \times) نحو الزمرة (Q^*, \times)

الحوار (1) نعتبر أنه يوجد مشاكل تقابلي من $(Q; +)$ نحو (Q^*, \times)

ومنه : $\forall (x, y) \in Q : f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

نضع $\alpha = f\left(\frac{1}{2}\right)$ (f متقابل عكسي)

ومنه : $2 = f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = (f\left(\frac{1}{2}\right))^2$

أي $\sqrt{2} \notin Q$ ، هذا لا يصح مع كون $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \in Q$

وبالتالي لا يوجد مشاكل تقابلي من $(Q; +)$ نحو (Q^*, \times)

(2) نعتبر أنه يوجد مشاكل تقابلي من (R^*, \times) نحو (Q^*, \times)

نضع : $\alpha = g\left(\frac{1}{2}\right)$ ($\alpha \in R$)

ومنه : $g(\alpha^2) = g(\alpha) \cdot g(\alpha) = (g(\alpha))^2 = \alpha^2 = -1$

وذن : $g(\alpha^2) = -1$

ولدينا : $g(1) = g(-1 + 2) = g(-1) \cdot g(2) = (g(-1))^2$

$g(1) = g(1 - 1) = g(1) \cdot g(-1) = (g(\alpha))^2$

ومنه : $g(1) = -g(-1)$ ، $g(1) = g(-1)$ أو $(g(1))^2 = (g(-1))^2$

مما أن g تبليبي فإن : $g(-1) = -g(1)$ ($g(-1) \neq g(1)$)

ولذا : $(g(1))^2 = g(1) \cdot g(1) = 0$ ، ومنه : $g(1) = 0$

أي : $g(1) = 0$ ، أو $g(1) = 1$

مما أن $g(1) \neq 0$ فإن : $g(1) = 1$

ونعلم أن : $g(\alpha^2) = -1$ ، $g(\alpha^2) = -g(1)$

$g(\alpha^2) = g(-1)$

بما أن g نياضي فإب: $\alpha^2 = -1$ ، وهذا ساهم مع كون $\alpha \in \mathbb{R}$ وبالتالي لا يوجد تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (\mathbb{C}^*, \times) .

- 18** ليكن $(G, *)$ زمرة و $\alpha \in G$ ، نعتبر التشف φ_α من G نحو G المعروف بمائلي:
- $$\varphi_\alpha(x) = \alpha * x * \alpha^{-1} \quad (\alpha^{-1} \text{ هو معكول } \alpha \text{ في } (G, *))$$
- (1) بين أن φ_α تشاكل تقابلي من $(G, *)$ نحو $(G, *)$.
- (2) بين أن: $\forall (a, b) \in G^2: \varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{a * b}$
- (3) نعتبر المجموعة: $H = \{ \varphi_\alpha \mid \alpha \in G \}$
- والتشف f المعروف من G نحو H بمائلي:
- $$f(\alpha) = \varphi_\alpha$$
- أ- من أن f تشاكل سموي من $(G, *)$ نحو (H, \circ) .
- ب- استنتج بنية المجموعة (H, \circ) .

الجواب: (1) ليكن x, y من G لدينا:

$$\varphi_\alpha(x * y) = \alpha * (x * y) * \alpha^{-1} = (\alpha * x * \alpha^{-1}) * (\alpha * y * \alpha^{-1})$$

$$\text{وهـ} \quad \varphi_\alpha(x * y) = \varphi_\alpha(x) * \varphi_\alpha(y)$$

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \circ \varphi_{\alpha^{-1}}(x) &= \varphi_\alpha(\varphi_{\alpha^{-1}}(x)) = \varphi_\alpha(\alpha^{-1} * x * \alpha) \\ &= \alpha * (\alpha^{-1} * x * \alpha) * \alpha^{-1} = (\alpha * \alpha^{-1}) * x * (\alpha * \alpha^{-1}) \end{aligned}$$

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_{\alpha^{-1}}(x) = x$$

$$\forall x \in G \quad \varphi_{\alpha^{-1}} \circ \varphi_\alpha(x) = x \quad \text{بالعزل بين أن:}$$

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_{\alpha^{-1}} = \varphi_{\alpha^{-1}} \circ \varphi_\alpha = \text{Id}_G \quad \text{وهـ،}$$

إذن φ_α تقابل من G نحو G و $(\varphi_\alpha)^{-1} = \varphi_{\alpha^{-1}}$.
وبالتالي φ_α تشاكل تقابلي من $(G, *)$ نحو $(G, *)$.

(2) ليكن a, b من G لدينا:

$$\begin{aligned} \forall x \in G, (\varphi_a \circ \varphi_b)(x) &= \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a(b * x * b^{-1}) \\ &= a * (b * x * b^{-1}) * a^{-1} \\ &= (a * b) * x * (b^{-1} * a^{-1}) \\ &= (a * b) * x * (a * b)^{-1} \quad (\because b^{-1} * a^{-1} = (a * b)^{-1}) \\ (\varphi_a \circ \varphi_b)(x) &= \varphi_{a * b}(x) \end{aligned}$$

و بالتالي : $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{a \circ b}$

(3) أ- ليكن a, b من G لدينا : $f(a \circ b) = \varphi_{a \circ b} = \varphi_a \circ \varphi_b$

ومنه : $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$

وبالتالي f تشاكل من $(G, *)$ نحو (H, \circ) .

ولدينا : $\forall \psi \in H \exists a \in G : \psi = f(a)$

لذا f شمولي.

ب- بمأن f تشاكل من (G, \circ) نحو (H, \circ) و $(G, *)$ زمرة

فإن : $(f(G), \circ)$ زمرة.

وبمأن : $f(G) = H$ فإن : (H, \circ) زمرة.

19) نعتبر المجموعة : $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

(1) يبين أن : $G \neq \emptyset$.

(2) يبين أن : $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$

(3) يبين أن G جزء مغلق من $(M_2(\mathbb{R}), +)$

(4) هل G جزء مغلق من $(M_2(\mathbb{R}), +)$ ؟

(5) نضع : $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

أحسب $M^n(\theta)$ حيث $M^n(\theta) = \underbrace{M(\theta) \circ M(\theta) \circ \dots \circ M(\theta)}_{n \text{ مرة}}$ و $n \in \mathbb{N}^*$

(6) نغير التيليف f المعرف من \mathbb{R} نحو G بمباي : $f(\theta) = M(\theta)$

أ- يبين أن f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R}, +)$ نحو $(G, +)$

ب- ما هي بنية المجموعة $(G, +)$ ؟

(7) نعتبر المجموعة : $\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1 \}$

أ- يبين أن : $\mathbb{U} = \{ e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \}$

ب- يبين أن (\mathbb{U}, \times) زمرة أبيلية.

(8) يبين أنه يوجد تشاكل من (\mathbb{U}, \times) نحو $(G, +)$.

الجواب : (1) لدينا : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ (بـ : $0^2 + 1^2 = 1$)

ومنه : $G \neq \emptyset$

(3) لدينا : $M \in G \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 : M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ و $a^2 + b^2 = 1$

بمعنى : $\exists \theta \in \mathbb{R} : a = \cos \theta ; b = \sin \theta$ ، فإن $a^2 + b^2 = 1$

وهذه : $M \in G \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

وبالتالي : $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$

(3) ليكن $M_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}$ و $M_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$ عن طريق G

أيضا : $M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

وهذه : $M_1 \times M_2 \in G$

وبالتالي G جزء مغلق من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

(4) لدينا : $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ و $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ عن طريق G

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin G$$

وهذه G جزء غير مغلق في $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

(3) لدينا : $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ، و $M^0(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ، و $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$M^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \quad \text{لمبين بالترجع أن :}$$

من أجل $n \geq 1$ لدينا الخاصية فيجوز :

نفترض أن : $M^n(\theta) = M(n\theta)$ ، نثبت أن : $M^{n+1}(\theta) = M((n+1)\theta)$

$$M^{n+1}(\theta) = M(\theta) \times M^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos n\theta - \sin \theta \sin n\theta & -\cos \theta \sin n\theta - \sin \theta \cos n\theta \\ \cos \theta \sin n\theta + \sin \theta \cos n\theta & -\sin \theta \sin n\theta + \cos \theta \cos n\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n\theta + \theta) & -\sin(n\theta + \theta) \\ \sin(n\theta + \theta) & \cos(n\theta + \theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{pmatrix} = M((n+1)\theta)$$

وبالتالي : $M^n(\theta) = M(n\theta)$ ، و $\forall n \in \mathbb{N}^*$

٢٤) ١- ليكن θ_1, θ_2 من \mathbb{R} لدينا :

$$f(\theta_1 + \theta_2) = M(\theta_1 + \theta_2) \\ = M(\theta_1) \times M(\theta_2)$$

$$\text{ومنه : } f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1) \times f(\theta_2)$$

اذن f تتشاكل من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (G, \times) .

$$\text{ولدينا : } \forall \theta \in G \quad \exists \theta \in \mathbb{R} : M = M(\theta) = f(\theta)$$

ومنه : f شمولي

وبالتالي f تتشاكل شمولي من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (G, \times) .

ب- بما أن $(\mathbb{R}, +)$ زمرة تبادلية و f تتشاكل شمولي من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (G, \times)

فإن (G, \times) زمرة تبادلية . (لأن : $f(\mathbb{R}) = G$)

$$(7) \text{ ١- لنبين أن } U = \{ e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{لدينا : } z \in U \Leftrightarrow |z| = 1$$

$$\Leftrightarrow |x+iy| = 1 \quad / \quad (z = x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad / \quad z = x+iy$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \quad x = \cos \theta \quad y = \sin \theta \quad \text{و } z = x+iy$$

$$\Leftrightarrow z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$U = \{ e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \} \quad \text{وبالتالي :}$$

ب- لنبين أن (U, \times) زمرة جزئية من (\mathbb{C}^*, \times)

لدينا : $U \subset \mathbb{C}^* \quad \text{و } U \neq \emptyset \quad (1 \in U \quad \text{لأن } 1 = e^{i0})$

ليكن z_1 و z_2 من U : $z_1 = e^{i\theta_1} \quad \text{و } z_2 = e^{i\theta_2} \quad \exists (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$

ومنه : $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_3} \quad \text{حيث } \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{اذن : } z_1 \cdot z_2 \in U$$

ومنه (U, \times) زمرة جزئياً من (\mathbb{C}^*, \times)

وبما أن (\mathbb{C}^*, \times) زمرة تبادلية فإن (U, \times) زمرة تبادلية

(8) نعتبر التطبيق g المعرف من U نحو G المعرف بما يلي :

$$g \cdot z = e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = M(\theta)$$

ليكن $z_1 = e^{i\theta_1} \quad \text{و } z_2 = e^{i\theta_2} \quad \text{حيث } (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$

$$g(\beta_1 + \beta_2) = g(e^{(\beta_1 + \beta_2)}) = M(\beta_1 + \beta_2) = M(\beta_1) \times M(\beta_2)$$

ومن هنا :
وبالتالي g تشاكل من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (G, \times) .

20 لكل A مجموعة المصفوفات M_n بحيث :

$$(\forall d \in \mathbb{R}^*) \quad M_d = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(d + \frac{1}{d}) & \frac{1}{2}(d - \frac{1}{d}) \\ \frac{1}{2}(d - \frac{1}{d}) & \frac{1}{2}(d + \frac{1}{d}) \end{pmatrix}$$

(1) - نتحقق أن A جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), +)$

ب- نعتبر التطبيق h المعرفة من $\mathbb{R}^* \rightarrow A$ بنابلي : $h(d) = M_d$

بين أن h تشاكل بنابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو $(A, +)$.

ج- حدد $M_d^{-1} = h(\frac{1}{d})$

(2) نضع $M_d^{-1} = M_d$; $M_d^n = M_d \cdot M_d \cdot \dots \cdot M_d$ ($\forall n \geq 2$) حدد M_d^n

(3) لتكن $E = \mathbb{R}^* \times \{0\}$

نعبر التطبيق φ المعرفة من E نحو A بنابلي : $\varphi(d, 0) = M_d$

عرف φ كما يونا تركب داخلًا \times في E حيث يكون φ تشاكلًا بنابليًا

من (E, \times) نحو $(A, +)$.

الاجواب : (1) - ليكن a, b من \mathbb{R}^* لدينا : M_a, M_b عنبرين من A

$$M_a \times M_b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + \frac{1}{a} & a - \frac{1}{a} \\ a - \frac{1}{a} & a + \frac{1}{a} \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b + \frac{1}{b} & b - \frac{1}{b} \\ b - \frac{1}{b} & b + \frac{1}{b} \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b}) + (a - \frac{1}{a})(b - \frac{1}{b}) & (a + \frac{1}{a})(b - \frac{1}{b}) + (a - \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b}) \\ (a - \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b}) + (a + \frac{1}{a})(b - \frac{1}{b}) & (a - \frac{1}{a})(b - \frac{1}{b}) + (a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2ab + \frac{2}{ab} & 2ab - \frac{2}{ab} \\ 2ab - \frac{2}{ab} & 2ab + \frac{2}{ab} \end{pmatrix}$$

$$M_a \times M_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(ab + \frac{1}{ab}) & \frac{1}{2}(ab - \frac{1}{ab}) \\ \frac{1}{2}(ab - \frac{1}{ab}) & \frac{1}{2}(ab + \frac{1}{ab}) \end{pmatrix} = M_{ab}$$

ومن هنا : $M_a \times M_b \in A$ وبالتالي A جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), +)$

ب- ليكن a, b من \mathbb{R}^* لدينا : $h(ab) = M_{ab} = M_a \times M_b$ (نلاحظ : h تشاكل بنابلي)

$$h(a \times b) = h(a) \times h(b) \quad \text{إذن :}$$

ومن ثم h تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (A, \times) .
 لدينا : $h(\mathbb{R}^*) = A$ ومن ثم h شمولي
 ليس h تبايني.

ليكن a و b من \mathbb{R}^* بحيث : $h(a) = h(b)$

$$h(a) = h(b) \Leftrightarrow Ma = Mb \Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} \\ a - \frac{1}{a} = b - \frac{1}{b} \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b) \left(\frac{ab-1}{ab} \right) = 0 \\ (a-b) \left(\frac{ab+1}{ab} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(ab-1) = 0 \\ (a-b)(ab+1) = 0 \end{cases}$$

بما أن : $(ab-1; ab+1) \neq (0,0)$ فإن : $a-b=0$ أي : $a=b$
 وبالتالي h تبايني.

إذن : h تشاكل تعاقلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (A, \times)

$$ج - \text{ ليكن } a \text{ من } \mathbb{R}^* \text{ لدينا : } h\left(\frac{1}{a}\right) = M_{\frac{1}{a}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + a, \frac{1}{a} - a \right)$$

بما أن h تشاكل تعاقلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (A, \times)

فإن h تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (A, \times) بدرجة
 تبادلية فإن (A, \times) زوجية تبادلية.

بما أن $\frac{1}{a} \neq \frac{1}{b}$ فإن $h\left(\frac{1}{a}\right) \neq h\left(\frac{1}{b}\right)$ هو مماثل

ومن ثم : $M_{\frac{1}{a}} \neq M_{\frac{1}{b}}$ مماثل M_a أي : $M_a^{-1} = M_{\frac{1}{a}}$

لدينا : $Ma \times Mb = Mab$ كل a و b من \mathbb{R}^*

$$M_a^2 = M_{a^2} \quad \text{ومن ثم :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M_a^n = M_{a^n} \quad \text{ليثبت أن :}$$

$$M_a^2 = M_a \quad \text{من أجل } n=2 \quad \text{لدينا :}$$

$$M_a^{n+1} = M_{a^{n+1}} \quad \text{ونثبت أن } M_a^n = M_{a^n}$$

$$M_a^{n+1} = M_a^n \cdot M_a = M_{a^n} \cdot M_a \quad \text{لدينا :}$$

$$M_a^{n+1} = M_{a^{n+1}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : M_a^n = M_{a^n} \quad \text{وبالتالي :}$$

2) φ تشاكل تقابلي من $(E, +)$ نحو (A, \times) لدينا:
 $\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$
 نضع : $x = (a, 0) \quad y = (p, 0)$
 إذن : $\varphi(x) = M_a \quad \varphi(y) = M_p$
 إذن : $\varphi(x+y) = M_a \times M_p = M_{ap} = \varphi(ap, 0)$
 بمات : φ تقابل فيان : $x+y = (ap, 0)$
 $\Leftrightarrow (a, 0) \times (p, 0) = (ap, 0)$
 وبالسبب : $\forall (a, p) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad (a, 0) \times (p, 0) = (ap, 0)$

21 لتكن (G, \cdot) زمرة .
 1) است أنه إذا كان كل a و b من G $(ab)^2 = a^2 b^2$ فإن العنصر a سادلي
 2) من أنه إذا كان كل x من G : $x^2 = e$ (e العنصر المحايد)
 فإن القانون \cdot تبادلي .

الجواب : 1) لدينا : $\forall (a, b) \in G^2 : (ab)^2 = a^2 b^2$
 إذن : $abab = aabb$

بمات : (G, \cdot) زمرة فإن كل عنصر من G منتهم فيان .
 $ba = ab$. ومنه القانون \cdot تبادلي .

2) لدينا : $\forall x \in G : x^2 = e$
 إذن : $\forall (x, y) \in G^2 \quad (xy)^2 = e$
 أي : $xyxy = e$ إذن : $x^2 y x y = x \cdot e$ إذن : $x^2 y x y = x$
 وبمات : $x^2 = e$ و $y^2 = e$ فيان : $yx = xy$
 ومنه القانون \cdot تبادلي .

22 لتكن (G, \cdot) زمرة غير تبادلية . ولتكن G' المجموعة :
 $G' = \{x \in G \mid \forall a \in G \quad xa = ax\}$
 بين أن G' زمرة جزئية لـ G .

الجواب : ليس أن كل x و y من G' : $xy^{-1} \in G'$

ليكن x و y من G' ليسا كل a من G .

$$a(xy^{-1}) = (ax)y^{-1} = (xa)y^{-1} = x(ay^{-1})$$

$$ay^{-1} = (y^{-1}a)^{-1} \quad \text{لدينا}$$

$$(y^{-1}a)^{-1} = (a^{-1}y)^{-1} \quad \text{سائر } y \in G' \quad y^{-1}a^{-1} = a^{-1}y$$

$$= y^{-1}a \quad \text{وعنه}$$

$$a(xy^{-1}) = x(y^{-1}a)$$

$$a(xy^{-1}) = (xy^{-1})a \quad \text{أي}$$

$$xy^{-1} \in G' \quad \text{وبالتالي}$$

$$\text{ومنه } (G', 0) \text{ زمرة جزئية لـ } (G, 0).$$

23 لنأخذ $E = \mathbb{R}^2$ مجموعة مزدوجة قانون تركيب داخلي * المعرف بمايلي

$$\forall (a, b) \in E^2, \forall (a', b') \in E^2 \quad (a, b) * (a', b') = (aa', b'a + b'\varphi(a))$$

حدد الدالة φ التي يجب أن نأخذها تكون $(E, +)$ زمرة ، حدد دالة بسيطة φ تحقق هذا الشرط .

الجواب : $(E, +)$ زمرة ، لذا كان دمجها على قانون تجميعي :

$$\begin{aligned} [(a, b) * (a', b')] * (a'', b'') &= (aa', b'a + b'\varphi(a)) * (a'', b'') \\ &= [aa'a''; (b'a + b'\varphi(a))a'' + b''\varphi(aa'a'')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a, b) * [(a', b') * (a'', b'')] &= (a, b) * (a'a'', b'a' + b''\varphi(a')) \\ &= [aa'a''; ba'a' + (b'a + b''\varphi(a))\varphi(a')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ba'a' + b''\varphi(a))\varphi(a') &= ba'a'' + (b'a + b''\varphi(a))\varphi(a') \quad \text{لأن :} \\ \varphi(aa'a'') &= \varphi(a'a'') = \varphi(a')\varphi(a'') \end{aligned}$$

العنصر المحايد لـ * : ليكن (x, y) عنصر محايد لـ *

$$\begin{cases} (a, b) * (x, y) = (ax, bx + y\varphi(a)) = (a, b) \quad \text{لأن } E \text{ لربنا} \\ (x, y) * (a, b) = (xa, ya + b\varphi(x)) = (a, b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax = a \\ bx + y\varphi(a) = ya + b\varphi(x) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \varphi(1) = 1 \end{cases}$$

ومنه $(1, 0)$ هو العنصر المحايد للعنصر * و $\varphi(1) = 1$

العصر المائل : ليكن (a, b) من E و (a', b') مماثلته بالقانون *

$$\begin{cases} (a, b) * (a', b') = (1, 0) \\ (a', b') * (a, b) = (1, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (aa', b'a' + b\psi(a)) = (1, 0) \\ (a'a, b'a + b\psi(a')) = (1, 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aa' = 1 \\ b'a' + b\psi(a) = 0 \\ b'a + b\psi(a') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \frac{1}{a} \\ b + a'b'\psi(a) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' = \frac{1}{a} \\ b' = -\frac{b}{a\psi(a)} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ن: } 1 = \psi(a + \frac{1}{a}) = \psi(a) + \psi(\frac{1}{a}) \\ \psi(a) \neq 0 \Rightarrow \psi(\frac{1}{a}) = \frac{1}{\psi(a)} \end{array} \right)$$

وبالتالي $(E, *)$ زمرة إذا وفقط إذا كان :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* : \psi(xy) = \psi(x)\psi(y) \quad \text{و} \quad \psi(1) = 1$$

مثال للدالة ψ : نعتبر $\psi(x) = x^n$ حيث : $n \in \mathbb{Z}$.

ليكن (G, \cdot) زمرة .

24

(1) $\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall a \in G \quad \forall b \in G : (ab)^p = a^p b^p$.

(2) $\forall a \in G \quad \forall b \in G : (ba)^{p-1} = a^{p-1} b^{p-1}$: فإذن :

(3) بين أن إذا وجد n من \mathbb{N}^* وكانت العلاقة (1) من أجل

$p = n+1$ ، $p = n$ ، $p = n+2$ فإذن (G, \cdot) زمرة تبادلية .

الاجواب : لدينا : (1) $\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall (a, b) \in G^2 : (ab)^p = a^p b^p$

- إذا كان القانون . تبادلي فإذن العلاقة (2) متحققة لكل p من \mathbb{N}

- إذا كان القانون . غير تبادلي لدينا :

$$(ab)^p = \underbrace{(ab)(ab) \dots (ab)}_{p \text{ مرة}} = a \underbrace{(ba) \dots (ba)}_{(p-1) \text{ مرة}} b = a(ba)^{p-1} b$$

$$a(ba)^{p-1} b = a^{p-1} a b^{p-1} b = a^{p-1} b^{p-1} ab$$

بما أن (G, \cdot) زمرة فإذن كل عنصر من G هو عنصر منتهى

$$(ba)^{p-1} = a^{p-1} b^{p-1}$$

وبالتالي : (2) $\forall (a, b) \in G^2 : (ba)^{p-1} = a^{p-1} b^{p-1}$

(3) حسب السؤال (1) بما أن $(ab)^{n+1} = a^{n+1} b^{n+1}$ فإذن $(ba)^n = a^n b^n$

بما أن $(ab)^n = a^n b^n$ فإذن $(ba)^{n-1} = a^{n-1} b^{n-1}$

بما أن: $(ab)^{1-n} = a^{-1}b^{1-n}$ فإن: $(ab)^{1-n} = (ba)^{1-n}$
 إذن لدينا: $(ab)^n = (ba)^n$
 ومنه: $(ab)^n(ab)^{1-n} = (ba)^n(ba)^{1-n}$
 أي: $ab = ba$
 وبالتالي (G, \circ) زمرة تبادلية.

25 عنصر المجموعة $I =]-1, 1[$ ومجموعة العنصرات التالية:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} \mid x \in I \right\}$$

(أ) بين أن التطبيق:

$$\varphi: I \rightarrow M \\ x \mapsto m(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}$$

(ب) عرّف في I القانون \times المعرفة تماثلياً: $\forall (x, y) \in I^2: x \times y = \frac{x+y}{1+xy}$

أ- بين أن \times هو فعلاً قانوناً يركب داخل I

ب- بين أن (M, \times) زمرة تبادلية

ج- استنتج أن (I, φ) زمرة سادلية. معبراً عما يليه ومما يليه
 عنصر \times من I .

الحواب: (أ) لدينا التطبيق $\varphi: I \rightarrow M$
 $x \mapsto m(x)$

بين أن φ تماثلي.

ليكن x, y من I . بحيث:

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow m(x) = m(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \begin{pmatrix} 1 & -y \\ -y & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2} \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

ومنه φ تطبيق تماثلي. وبالتالي φ تماثل من I نحو M .

(ب) ليكن x, y من I لدينا:

$$x \times y = \frac{x+y}{1+xy}$$

$$xy - 1 = \frac{x+y}{1+xy} - 1 = \frac{(x-1)(1-y)}{1+xy} \quad \text{لدينا:}$$

$$\begin{aligned} -1 < xy < 1 \quad \text{أي} \quad |xy| < 1 \quad \text{حيث} \quad |y| < 2 \quad \text{و} \quad |x| < 2 \quad \text{معاً} \\ 0 < 1+xy < 2 \quad \text{لذا:} \end{aligned}$$

$$\text{ولدينا:} \quad -2 < x < 2 \quad \text{و} \quad -2 < y < 2 \quad \text{لذا:} \quad x-1 < 0 \quad \text{و} \quad 1-y > 0$$

$$\text{ومنه:} \quad xy - 1 < 0 \quad \text{أي} \quad xy < 1 \quad (1)$$

$$\text{لدينا:} \quad xy + 1 = \frac{x+y}{1+xy} + 1 = \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} > 0$$

$$0 < 1+xy < 2 \quad \text{و} \quad 0 < y+1 < 2 \quad \text{و} \quad 0 < x+1 < 2 \quad \text{لذا:}$$

$$(2) \quad -1 < xy \quad \text{لذا:}$$

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad x+y \in I \quad \text{من (1) و (2) نستنتج أن:}$$

والمساواة العنقودية هي قابلية تركيب داخلية في I .

ب - لدينا $M \subset M_2(\mathbb{R})$ و $(M_2(\mathbb{R}), X)$ زمرة

حيث $M_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة في \mathbb{R}

www.learnit66ghz.com

لكي نثبت أن (M, X) زمرة، يكفي أن نبينها زمرة جزئية من $M_2(\mathbb{R})$

$$\text{ليكن } x, y \text{ عن } I \text{ لدينا:} \quad \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & -y \\ -y & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \begin{pmatrix} 1+x & -x-y \\ -x-y & 1+xy \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x+y}{1+xy} \\ -\frac{x+y}{1+xy} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(x) \times M(y) = M(y) \times M(x) \quad \text{و} \quad M(x) \times M(y) = M\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \quad \text{ومنه:}$$

$$M(x) \times M(y) \in M \quad \text{لذا:}$$

$$\text{لدينا:} \quad M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{العنصر المتبادل لـ } x \text{ في } M$$

$$M(x) \times M(-x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ولدينا:}$$

$$M(-x) \in M \quad \text{و} \quad M(-x) \text{ هو معكول لـ } M(x) \text{ في } M$$

لذا (M, X) زمرة متداخلة جزئية من $(M_2(\mathbb{R}), X)$

ج- لذا : $m(x) \times m(y) = m\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ $\forall (x, y) \in I$

ومنه : $\varphi(x+y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

بأن φ تماثل تقابلي من $(I, +)$ نحو (\mathbb{M}, \times)

ومنه : نبينة $(I, +)$ هي نبينة (\mathbb{M}, \times)

سأب (\mathbb{M}, \times) زمرة باءية فإب $(I, +)$ زمرة تبادلية

- سأب $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ العنصر المعاد ل x في \mathbb{M}

فإب $\varphi^{-1}(M(0)) = 0$ هو العنصر المعاد ل x في I

وسأب $m(-x)$ هو العنصر المعاكس ل $m(x)$ في (\mathbb{M}, \times)

فإب $\varphi^{-1}(m(-x)) = -x$ هو العنصر المعاكس ل x في $(I, +)$

26 لكن (G, \circ) زمرة تبادلية : نعرّف : $x^n = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ مرات}}$

نفترض أن : $a^n = e$; $\forall a \in G$; $(n \geq 1)$; e العنصر المعاد

نضع : $G_n = \{x \in G \mid x^n = e\}$ و $G_p = \{x \in G \mid x^p = e\}$; $p \in \mathbb{N}$; $n \in \mathbb{N}$ بحيث : $n \wedge p = 1$

(1) سأب G_n و G_p هما زميرتين جزئيتين في G

(2) سأب $G_n \cap G_p = \{e\}$

(3) بين أن : $\forall x \in G_n \exists y \in G_p : x = y^p$

(4) بين أن : $\forall a \in G \exists b \in G_n : a^p = b^n$

(5) سأب $\forall a \in G \exists (x, y) \in G_n \times G_p : a = xy$

(6) بين أن : $\text{card } G = \text{card } G_n \times \text{card } G_p$

(الاجاب : 1) لسأب G_n و G_p زميرتين جزئيتين في G

لدينا : $G_n \neq \emptyset$ لأن : $e \in G_n$ ($e^n = e$)

لكن $x \neq y$ في G_n لذا : $e \cdot e^1 = e \cdot e^1 = e \cdot e^1 = e \cdot e^1 = e$; $x^1 \cdot y^1 = (xy)^1$

بأن : $x \cdot y^{p-1} \in G_n$ (لأن : تبادلية)

ومنه (G_n, \circ) زمرة جزئية في (G, \circ) .

بالمثل نرى أن (G_p, \circ) زمرة جزئية في (G, \circ)

(2) لنبين أن $G \cap G^A = \{e\}$.

لدينا $\{e\} \subset G \cap G^A$ (بأن $e \in G$ و $e \in G^A$)

لنبين أن $G \cap G^A \subset \{e\}$.

بما أن $xy = 1$ فإنه حسب مبرهنة مبرهنة Bezout

$$\exists (p, q) \in \mathbb{Z}^+ : pa + qb = 1$$

$$\begin{aligned} x \in G \cap G^A &\Rightarrow x = x^1 = x^{pa+qb} \\ &\Rightarrow x = (x^a)^p \cdot (x^b)^q = e^p \cdot e^q = e \cdot e \\ &\Rightarrow x = e \end{aligned}$$

وهنا $G \cap G^A \subset \{e\}$

وبالتالي $G \cap G^A = \{e\}$.

(3) لنبين أن $\forall x \in G \exists y \in G^A : x = y^A$

$$x \in G \Rightarrow x = x^1 = x^{pa+qb} = (x^a)^p \cdot (x^b)^q$$

$$\Rightarrow x = e^p \cdot (x^b)^q = e \cdot (x^b)^q$$

$$\Rightarrow x = (x^b)^q$$

نضع $y = x^b$ لنبين أن $y^A = x$

$$y^A = x^b = (x^b)^q = e^q = e$$

وهنا $y \in G^A$

وبالتالي $\forall x \in G \exists y \in G^A : x = y^A$

(4) لنبين أن $\forall a \in G \exists b \in G^A : a^A = b^A$

ليكن a من G ؛ نضع $x = a^A$ لدينا حسب السؤال (3) :

$$x^A = a^{AA} = a^1 = e \Rightarrow x \in G^A$$

$$x \in G^A \exists b \in G^A : x = a^A = b^A$$

$$\forall a \in G \exists b \in G^A : a^A = b^A$$

وبالتالي

(5) لنبين أن $\forall a \in G \exists (x, y) \in G \times G^A : a = xy$

$$a = a^1 = a^{pa+qb} = a^p \cdot a^q$$

$$a = x \cdot y \quad \text{نضع} \quad x = a^p \quad \text{و} \quad y = a^q$$

$$x^A = a^{pA} = (a^A)^p = e \quad \text{و} \quad y^A = a^{qA} = (a^A)^q = e$$

ومن ثم: $a = xy$ و $(x, y) \in G_N \times G_M$

- الوجدانية: نفترض أن: $a = x \cdot y = x' \cdot y'$

مع $(y, y') \in G_M^2$ و $(x, x') \in G_N^2$

لدينا: $y \cdot y'^{-1} = x' \cdot x^{-1}$

إذن: $y \cdot y'^{-1} \in G_N \cap G_M$ و $x' \cdot x^{-1} \in G_N \cap G_M$

وبما أن: $G_N \cap G_M = \{e\}$ فإن: $y \cdot y'^{-1} = e$ و $x' \cdot x^{-1} = e$

أي: $y' = y$ و $x' = x$

وبالتالي: $\forall a \in G \exists! (x, y) \in G_N \times G_M : a = x \cdot y$

(6) ليثبت أن: $\text{Conj } G = \text{Conj } G_N \times \text{Conj } G_M$

لذلك يكفي أن نبين أن G و $G_N \times G_M$ متساويان تقابلياً.

نختار التثقيب: $\varphi: G_N \times G_M \rightarrow G$

$(x, y) \mapsto xy$

ونعرف قانون تركيب داخلي في $G_N \times G_M$ بعلي:

$$(x, y) \times (x', y') = (xx', yy')$$

بحسب السؤال (5) لدينا φ تقابل وبعد الحساب يمكن أن يبين أن:

$$\varphi((x, y) \times (x', y')) = \varphi(x) \varphi(y')$$

ومن ثم φ تشاكل تقابل من $G_N \times G_M$ نحو G

إذن $G_N \times G_M \cong G$ و G متقاربان أي $G_N \times G_M \cong G$

وبالتالي: $\text{Conj } G = \text{Conj } G_N \times \text{Conj } G_M$

لكي n من \mathbb{N} نرمز بـ $n\mathbb{Z}$ للمجموعة:

$$n\mathbb{Z} = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

(1) يبين أن $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$.

(2) لتكن G زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$ بحيث: $G \neq \emptyset$

نضع: $n = \min(G \cap \mathbb{N}^*)$

أ- يبين أن n له معنى (أي n موجود)

ب- يبين أن: $n\mathbb{Z} \subset G$

ج- ليكن x من G باستخدام القسمة الاقليدية ل x على n في \mathbb{Z} .

$$G \subset n\mathbb{Z} \quad \text{نفس أن}$$

(3) ماذا يمكنك أن تسمي؟

الاجواب (1) لئلا $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$ (لأن $0 = n \cdot 0 \in \mathbb{Z}$)
ليكن x, y من $n\mathbb{Z}$ لئلا $x = nd$ و $y = np$ حيث $(d, p) \in \mathbb{Z}^2$

$$x - y = n(d - p) \in n\mathbb{Z} \quad \text{اذن}$$

ومنه $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$.

(2) أ- لئلا $G \cap \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*$ و $G \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$ (لأن $G \neq \emptyset$)
إذن $G \cap \mathbb{N}^*$ قابل أجزع غير منتهي (لأن $G \cap \mathbb{N}^*$ مغلقة بالعدده)

ب- ليكن n له معنى
ب- ليكن n من G

ليكن x من $n\mathbb{Z}$ لئلا: $\exists d \in \mathbb{Z}, x = nd$

$$nd = \underbrace{n + n + \dots + n}_n \quad \text{بما أن } n \text{ من } G \text{ فإن:}$$

وبما أن $(G, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$ فإن: $nd \in G$

أي $x \in G$ ومنه $n\mathbb{Z} \subset G$

ج- ليكن x من G لئلا $x = qn + r$ و $0 \leq r < n$ $\exists! (q, r) \in \mathbb{Z}^2$

$$r = x - qn \quad \text{منه}$$

بما أن $x \in G$ و $qn \in G$ فإن: $x - qn \in G$

لأن G زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$.

ومنه: $r \in G$

إذا كان $x \neq 0$ فإن $0 < r < n$ وهذا لا يمكن مع كون $n = \min(G \cap \mathbb{N}^*)$

$$\text{اذن: } r = 0 \quad \text{أي: } x = qn \in n\mathbb{Z}$$

$$G \subset n\mathbb{Z} \quad \text{اذن:}$$

(3) حسب السؤال (1) لئلا $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$

وحسب السؤال (2) أنه إذا كان G زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$

فإنه يوجد n من \mathbb{N}^* بحيث: $G = n\mathbb{Z}$

الحلقة - الجسم

1 لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة واحدة. عيّن المعايير 1_A بالصفة للهراب وليكن x من A .

نعو ل x بعف العلاقة (R) إذ اوفقاً إذا كان $\exists n \in \mathbb{N} \quad x^n = 0_A$

(1) ليكن x و y عيهران من A وحقان العلاقة (R) بحسب $xy = yx$ يبين أن $x+y$ يحقق العلاقة (R) .

(2) يد أنه إذا كان x بعف العلاقة (R) و $xy = yx$ إذا xy بعف العلاقة (R) .

(3) يد أنه إذا كان x بعف العلاقة (R) فإن $1_A - x$ بعف مقلوب. بسم بحديد.

الجواب : (1) x يحقق العلاقة $(R) \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad x^n = 0_A$

y بعف العلاقة $(R) \iff \exists m \in \mathbb{N} \quad y^m = 0_A$

سأل $yx = xy$ ، تهلين المسعة الحدانية داخل الحلقة A لدينا

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} C_{m+n}^k x^k y^{m+n-k}$$

$$= y^m \left(\sum_{k=0}^n C_{m+n}^k x^k y^{n-k} \right) + x^n \left(\sum_{k=0}^{m-1} C_{m+n}^k x^k y^{m-k} \right)$$

وبما أن $x^n = 0_A$ فإن $y^m = 0_A$ ، فإن $(x+y)^{n+m} = 0_A$

ومنه $x+y$ يحقق العلاقة (R) .

(2) بما أن $xy = yx$ فإن كل p من \mathbb{N} : $(xy)^p = x^p y^p$

بما أن x يحقق العلاقة (R) فإن : $\exists n \in \mathbb{N} \quad x^n = 0_A$

$$\text{ومنه} \quad (xy)^n = x^n y^n = 0_A y^n = 0_A$$

وبالتالي y يحقق العلاقة (R)

(3) نفترض أن x يحقق العلاقة (R) أي : $\exists n \in \mathbb{N} \quad x^n = 0_A$

$$\text{لدينا} \quad 1_A x^n = (1_A - x)(1_A + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$$

$$(x^n = 0_A \text{ لأن } 1_A = (1_A + x + x^2 + \dots + x^{n-1})(1_A - x))$$

$$\text{ومنه } 1_A - x \text{ قابل مقلوب هو : } (1_A - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \in A$$

2 بعنصر حلقه واحديه $(A, +, \cdot)$ و 1_A هو العنصر المحايد بالانضام
للعناصر الداخلية .

ليكن a و b عنصرين من A بحيث .

$$ab + ba = 1_A \quad (1)$$

$$a^2b + ba^2 = a \quad (2)$$

$$a^2b = ba^2 \quad (3) \text{ يبين أن :}$$

$$aba + aba = a \quad (4) \text{ من أن :}$$

$$ab = ba \quad (5) \text{ استنتج أن :}$$

الجواب : (1) لدينا :

$$= a \cdot 1_A$$

$$= a \cdot (ab + ba)$$

$$= a^2b + ab a$$

$$a^2b + ba = a^2b + ab a \quad \text{ومنه :}$$

$$ba^2 = ab a \quad (2) \text{ وبالتالي :}$$

$$a^2b + ba^2 = a^2b + ab a \quad \text{ولدينا :}$$

$$= 1_A \cdot a$$

$$= (ab + ba) \cdot a$$

$$a^2b + ba^2 = ab a + ba^2 \quad \text{ومنه :}$$

$$(2) \quad a^2b = ab a \quad \text{وبالتالي :}$$

$$a^2b = ba^2 \quad \text{من (1) و (2) تستنتج أن :}$$

$$ab a = a^2b \quad \text{و} \quad ab a = ba^2 \quad (3) \text{ لدينا حسب ما سبق}$$

$$ab a + ab a = a^2b + ba^2 \quad \text{ومنه :}$$

$$(ab a + ab a) = a \quad (4) \text{ (حسب (1))}$$

$$(ab)(ab) = (1_A - ba)(1_A - ba) \quad (3) \text{ لدينا :}$$

$$(ab = 1_A - ba) \quad (5)$$

$$(ab)(ab) = (ab a)b = (ba^2)b \quad (6) \quad (ab a = ba^2) \quad (5)$$

$$(ba)(ba) = b(ab a) = b(a^2b) \quad (7) \quad (ab a = a^2b) \quad (5)$$

$$(ab)(ab) = (1_A - ba)(1_A - ba) \quad \text{لدينا :}$$

$$= 1_A - ba - ba + (ba)(ba)$$

$$ba^2b = 1a - ba - ba + ba^2b$$

$$(ab)(ab) = (ba)(ba) = ba^2b \quad \text{لأن :}$$

$$ba + ba = 1a \quad \text{ومنه :}$$

$$ba + ab = 1a \quad \text{وبما أن :}$$

$$ab = ba \quad \text{فإن :}$$

3 تكون $(A, +, \cdot)$ حلقة : نفع :

$$E(A) = \{x \in A \mid x^2 = x\} \quad ; \quad C(A) = \{x \in A \mid \forall a \in A, xa = ax\}$$

الجزء الأول : نفترض في هذا الجزء فقط أن :

$$\forall (x, y) \in A^2 : xy \in E(A)$$

$$\forall (x, y) \in A^2 : xy = 0 \Rightarrow yx = 0 \quad (1) \text{ من أن :}$$

$$E(A) \subset C(A) \quad (2) \text{ استنتج أن :}$$

$$(3) \text{ بين أن : } (A, +, \cdot) \text{ حلقة تبادلية .}$$

الجزء الثاني : نفترض في هذا الجزء فقط أن :

$$\forall (x, y) \in A^2 : xy - yx \in E(A)$$

$$\forall (x, y) \in A^2 : xy = 0 \Rightarrow yx = 0 \quad (1) \text{ بين أن :}$$

$$E(A) \subset C(A) \quad (2) \text{ استنتج أن :}$$

$$\forall (x, y) \in A^2 : xy - yx = yx - xy \quad (3) \text{ بين أن :}$$

$$\forall x \in A : x^2 \in C(A) \quad (4) \text{ بين أن :}$$

الجواب : الجزء الأول :

$$(1) \text{ نفترض أن : } xy = 0 \text{ و نبين أن : } yx = 0$$

$$\text{لكل } x \text{ و } y \text{ من } A \text{ لدينا : } yx \in E(A) \Leftrightarrow yx = (yx)^2$$

$$\Leftrightarrow yx = yx \cdot yx = y(yx)x = 0$$

$$\forall (x, y) \in A^2 : xy = 0 \Rightarrow yx = 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$(2) \text{ ليكن } x \text{ من } E(A) \text{ لدينا : } x^2 = x$$

$$\text{لكل } a \text{ من } A \text{ لدينا : } x^2a = xa$$

$$x^2a - xa = 0 \Leftrightarrow x(xa - a) = 0 \quad \text{لأن } a$$

$$\Rightarrow (xa - a) \cdot x = 0 \quad (\text{موجب 1})$$

$$\Rightarrow xax - ax = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{xax = ax} \quad (1)$$

$$ax^2 = ax \Leftrightarrow ax^2 - ax = 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$\Rightarrow (ax - a)x = 0$$

$$\Rightarrow x(ax - a) = 0$$

$$\Rightarrow xax - xa = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{xax = xa} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $xa = ax$ ، ومنه $x \in C(A)$ ،

وبالتالي: $E(A) \subset C(A)$

(3) ليكن x, y من E لدينا: $xy \in E(A)$

$$\text{ومنه: } xy = (xy)^t = x(yxy)$$

$$xy = x(yxy) \quad \text{وبما أن } yxy \in E(A) \subset C(A) \text{ فإن}$$

$$= (yxy)x = (yx)(yx) = (yx)^2 = yx$$

$$xy = yx \quad \text{لأن:}$$

بالتالي $(A, +, \cdot)$ حلقة تبديلية

الجزء الثاني:

(1) نفترض أن: $xy = 0$ مع $(x, y) \in A^2$

$$yx = yx - xy \quad (\text{لأن: } xy = 0)$$

$$\text{بما أن } yx - xy \in E(A) \text{ فإن:}$$

$$yx = yx - xy = (yx - xy)^2 = (yx)^2 - yxxy - xyxy + (xy)^2$$

$$= (yx)^2 \quad (\text{لأن: } xy = 0)$$

$$= yx yx = y(xy)x$$

$$\text{ومنه: } yx = 0$$

(2) نثبت بالترقية الضمنية في المثال رضم الجزء الأول.

(3) ليكن x, y من A لدينا: $xy - yx \in E(A)$

$$\text{ومنه: } (yx - xy) \in E(A) \quad \text{لأن: } xy - yx = -(yx - xy) \Rightarrow (yx - xy)^2 = (yx - xy)(yx - xy) = yx - xy$$

(4) لنبين أن لكل x من A : $x^2 \in C(A)$

لدينا : $xA - ax \in E(A) \subset C(A)$

$$\Rightarrow x(xa - ax) = (xa - ax)x \\ = (ax - xa)x$$

$$\Rightarrow x^2a - xax = x^2x - xax$$

$$\Rightarrow x^2a = ax^2$$

أي : $x^2 \in C(A)$

لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة و $I \subset A$

نقول أن I مثالي من A إذا وفقط إذا تحقق الشروط التالية :

(1) $I \neq \emptyset$

(2) $\forall (x, y) \in I^2 : x - y \in I$

(3) $\forall (x, a) \in I \times A : xa \in I$ (نكتب $(A, +, \cdot)$ حلقة واحدة و I و J مثاليين من A)

$R(I) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} x^n \in I\}$

(1) - يبين أن $R(I)$ مثالي من A

(2) - يبين أن $I \subset R(I)$

(3) $R(A) = A$ يبين

(4) $I \subset J \Rightarrow R(I) \subset R(J)$ يبين أن :

(5) $R(R(I)) = R(I)$ يبين أن :

(6) $R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)$ يبين أن :

الاجواب (1) - أ- لاسا $I \neq \emptyset$ ومنه $x^2 \in xI$ و $x \in I$

ومنه $R(I) \neq \emptyset$

ليكن x, y من $R(I)$ لاسا $x^n \in I$ و $y^m \in I$ و $(n, m) \in I^2$

لنبين أن : $(x - y)^{n+m} \in I$

لدينا $(x - y)^{n+m} = \sum_{p=0}^{n+m} (-1)^{m+n-p} \binom{n+m}{m+n-p} x^p y^{m+n-p}$

$= y^m \left(\sum_{p=0}^n (-1)^{m+n-p} \binom{n}{p} x^p y^{n-p} \right) + x^n \left(\sum_{p=n+1}^{n+m} (-1)^{m+n-p} \binom{n+m}{p} x^{p-n} y^{m+n-p} \right)$

لدينا $0 \leq p \leq n, m+n-p \geq m \Rightarrow x^p y^{m+n-p} \in A$

$n+1 \leq p \leq n+m \Rightarrow x^{p-n} y^{m+n-p} \in A$

ومنه $\alpha_1 = \sum_{p=0}^n (-1)^{m+n-p} \binom{n}{p} x^p y^{n-p} \in A$ و $\alpha_2 = \sum_{p=n+1}^{n+m} (-1)^{m+n-p} \binom{n+m}{p} x^{p-n} y^{m+n-p} \in A$

إذاً : $(x-y)^{n+m} = y^n a_1 + x^n a_2$
 ، بما أن $x^n a_1 \in I$ ، $y^n a_2 \in I$ ، فإن $y^n \in I$ ، $x^n \in I$
 (لأن : I مثالي $\exists A$) ، منه : $x^n a_2 + y^n a_1 \in I$ ، أي :
 $(x-y)^{n+m} \in I$
 وبالتالي : $x-y \in R(I)$

ليكن a من A ، فإن : $(ax)^n = a^n x^n$ (لأن A حلقه بتبادلية)
 بما أن $x^n \in I$ ، $a^n \in A$ ، I مثالي من A
 فإن : $a^n x^n \in I$ ، أي : $(ax)^n \in I$
 ومنه : $ax \in R(I)$

وبالتالي $R(I)$ مثالي من A .

ب- لدينا : $x \in I \Rightarrow x^1 \in I$
 $\Rightarrow x \in R(I)$

ومنه : $I \subset R(I)$

(2) لدينا : $A \subset R(A)$ (لأن A مثالي)
 ، وبما أن : $R(A) \subset A$ ، فإن : $R(A) = A$

(3) نفترض أن $I \subset J$

ليكن x من $R(I)$ ، إذاً : $\exists n \in \mathbb{N} : x^n \in I$

إذاً : $\exists n \in \mathbb{N} : x^n \in J$ (لأن : $I \subset J$)

ومنه : $x \in R(J)$

وبالتالي : $R(I) \subset R(J)$

(4) لنبين أن : $R(R(I)) = R(I)$

لدينا : $I \subset R(I)$ ، منه : $R(I) \subset R(R(I))$ (حسب السؤال 2)

لنبين أن : $R(R(I)) \subset R(I)$

لدينا : $y \in R(R(I)) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y^n \in R(I)$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \exists p \in \mathbb{N} : (y^n)^p \in I$

$\Rightarrow \exists np \in \mathbb{N} : y^{np} \in I$

$\Rightarrow y \in R(I)$

$$R(R(I)) \subset R(I) \quad \text{ومنه :}$$

$$R(R(I)) = R(I) \quad \text{وبالتالي :}$$

$$R(I \cap J) = R(I) \cap R(J) \quad (5) \quad \text{لنبين أن :}$$

$$(I \cap J \subset I \text{ و } I \cap J \subset J) \Rightarrow \begin{cases} R(I \cap J) \subset R(I) \\ R(I \cap J) \subset R(J) \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$R(I \cap J) \subset R(I) \cap R(J) \quad \text{إذن :}$$

$$R(I) \cap R(J) \subset R(I \cap J) \quad \text{لنبين أن :}$$

$$x \in R(I) \cap R(J) \Leftrightarrow \exists (n, p) \in \mathbb{N} \cdot x^n \in I \text{ و } x^p \in J \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} x^n \in I \\ x^p \in J \end{cases} \Rightarrow x^n \cdot x^p \in I \quad (\text{لأن } I \text{ مثالي من } A)$$

$$\begin{cases} x^p \in J \\ x^n \in I \end{cases} \Rightarrow x^p \cdot x^n \in J \quad (\text{لأن } J \text{ مثالي من } A)$$

$$x^{n+p} \in I \cap J \quad \text{ومنه :}$$

$$x \in R(I \cap J) \quad \text{أي :}$$

$$R(I) \cap R(J) \subset R(I \cap J) \quad \text{ومنه :}$$

$$R(I \cap J) = R(I) \cap R(J) \quad \text{وبالتالي :}$$

5 لكن $(K, +, \cdot)$ جسم نوهر \mathbb{K} بالعصر المعاكس بالأسية

للضرب \cdot .

نفترض أنه يوجد f تشاكل تقابلي من $(K, +)$ نحو $(K, \{0_K\}; \cdot)$

$$(1) \quad \text{نفترض أن : } 1_K + 1_K = 0_K$$

$$f(K) = \{1_K\} \quad \text{بين أن :}$$

$$(2) \quad \text{نفترض أن : } 1_K + 1_K \neq 0_K \quad \text{نضع : } \alpha = f(1_K) \text{ و } \beta = f(-1_K)$$

$$\alpha + \alpha = \beta + \beta \quad \text{أ- بين أن :}$$

$$\beta = \alpha \quad \text{ب- استنتج أن :}$$

(3) استنتج أنه لا يوجد تشاكل تقابلي من $(K, +)$ نحو $(K, \{0_K\}; \cdot)$

الجواب : (1) إذا كان : $1_K + 1_K = 0_K$ فإن لكل x من K لدينا :

$$x + x = x(1_K + 1_K) = x \cdot 0_K = 0_K$$

ومنه : $f(x+x) = (f(x))^2 = f(0_K) = 1_K$ (لأن f تنقل كل نقابلي)
 إذاً : $f(x) = -1_K = 1_K$ أو $f(x) = 1_K$
 وبالتالي : $f(K) = \{1_K\}$

(ع) - أيضاً : $f^{-1}(1_K) = d \Leftrightarrow f(d) = 1_K$

$f^{-1}(-1_K) = p \Leftrightarrow f(p) = -1_K$

ومنه : $f(d+d) = (f(d))^2 = 1_K^2 = 1_K$

$f(p+p) = (f(p))^2 = (-1_K)^2 = 1_K$

إذاً : $f(d+p) = f(p+p)$

وبما أن f تقابل فإن : $d+p = p+p$

ب- أيضاً : $d+p = p+p \Leftrightarrow (d-p) + (d-p) = 0_K$

$\Leftrightarrow (d-p)(1_K + 1_K) = 0_K$

$\Leftrightarrow d-p = 0_K$ أو $1_K + 1_K = 0_K$ (ك جسم)

$\Leftrightarrow d-p = 0$ (لأن $1_K + 1_K \neq 0_K$)

$\Leftrightarrow d = p$

(د) إذا كان هناك تساكل نقابلي من $(K, +)$ نحو $(K - \{0_K\}, \times)$

ليتنا حالتيه بالنسبة للمجموع $1_K + 1_K$

الحالة 1 : إذا كان : $1_K + 1_K = 0_K$. حسب السؤال 1) أيضاً :

$\forall x \in K \quad f(x) = \{1_K\}$

$f(K) = \{1_K\} \Leftrightarrow f^{-1}(\{1_K\}) = K$ أي :

أي : K مجموعة منتهية

ومنه : $\text{Card } K = \text{Card}(K - \{0_K\})$ ، هذا مستحيل .

الحالة 2 : إذا كان : $1_K + 1_K \neq 0_K$ حسب السؤال 2)

أخذ : $\alpha = f^{-1}(1_K)$ و $p = f^{-1}(-1_K)$ بحسب (أ) $\alpha = p$

أي : $f(-1_K) = f(1_K)$ وبما أن f تقابل

فإن : $-1_K = 1_K$ أي : $1_K + 1_K = 0_K$ تناقض مع كون $1_K + 1_K \neq 0_K$

وبالتالي لا يوجد تساكل نقابلي من $(K, +)$ نحو $(K - \{0_K\}, \times)$.

6

ليكن $(K, +, \cdot)$ جسم و x و y عنصران من $K \setminus \{0\}$ يحققان

ما يلي: (أ) $x + y = -1K$ (ب) $x^2 + y^2 = 1K$ (ج) $xy = yx = -1K$ (د) $x^4 + y^4 = 7$

(أ) بين أن: $x^2 + y^2 = 1K$ (ب) $x^4 + y^4 = 7$

(ج) بين أن: $xy = yx = -1K$

(د) بين أن: $x^4 + y^4 = 7$

7 مرات

الجواب: (أ) لدينا لكل x و y من K :

$$xy = x(x^2 + y^2)y = xx^2y + xy y^2 = y + x = -1K$$

$$yx = y(y^2 + x^2)x = yy^2x + yx^2x = x + y = -1K$$

$$xy = yx = -1K \quad \text{وهذا.}$$

$$1K = (x + y)^2 \quad \text{(ب) لدينا.}$$

$$= x^2 + xy + yx + y^2$$

$$= x^2 - 1K - 1K + y^2$$

$$(3 = 1K + 1K + 1K) \quad x^2 + y^2 = 3 \quad \text{أب}$$

$$9 = (x^2 + y^2)^2 \quad \text{وهذا.}$$

$$= x^4 + x^2y^2 + y^2x^2 + y^4$$

$$= x^4 + 1K + 1K + y^4$$

$$x^4 + y^4 = 7 \quad \text{وهذا.}$$

نعرف على $E = R^2$ العاوس الداخلي \cdot و $+$ كما يلي:

7

$$\forall (a, b) \in E ; \forall (a', b') \in E$$

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

سأب. $(E, +, \cdot)$ جسم تبادلي.

الجواب: بنسبة $(E, +)$.

ليكن (a, b) و (a', b') و (a'', b'') من E

$$(a, b) + [(a', b') + (a'', b'')] = (a, b) + (a' + a'', b' + b'') \quad \text{لدينا.}$$

$$= (a + a' + a'', b + b' + b'')$$

$$= (a + a', b + b') + (a'', b'')$$

$$= [(a, b) + (a', b')] + (a'', b'')$$

ومنه القانون + تجميعي.

$$(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b) \quad \text{لدينا.}$$

ومنه $(0, 0)$ العنصر المحايد بالنسبة للقانون +.

$$(a, b) + (-a, -b) = (-a, -b) + (a, b) = (0, 0)$$

ومنه $(-a, -b)$ معاكسة لـ (a, b) بالنسبة لـ +

$$(a, b) + (a', b') = (a', b') + (a, b)$$

وبالتالي $(\mathbb{R}^2, +)$ زمرة قسادية.

سنة (\mathbb{R}, \cdot) :

ليكن (a, b) و (a', b') و (a'', b'') من \mathbb{R} لدينا:

$$(a, b) \cdot [(a', b') \cdot (a'', b'')] = (a, b) \cdot (a'a'' - b'b'', a'b'' + b'a'')$$

$$= [a(a'a'' - b'b'') - b(a'b'' + b'a'')] , a(a'b'' + b'a'') + b(a'a'' - b'b'')]$$

$$[(a, b) \cdot (a', b')] \cdot (a'', b'') = (aa' - bb', ab' + ba') \cdot (a'', b'')$$

$$= [(aa' - bb')a'' - (ab' + ba')b'', (aa' - bb')b'' + (ab' + ba')a'']$$

$$= [a(a'a'' - b'b'') - b(a'b'' + b'a'') ; a(a'b'' + b'a'') + b(a'a'' - b'b'')]$$

$$(a, b) \cdot [(a', b') \cdot (a'', b'')] = [(a, b) \cdot (a', b')] \cdot (a'', b'') \quad \text{إذن.}$$

ومنه القانون \cdot تجميعي.

العنصر المحايد للقانون \cdot :

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b) \quad \text{لدينا.}$$

ومنه $(1, 0)$ هو العنصر المحايد للقانون \cdot .

مقلوب (a, b) : ليكن (x, y) مقلوب (a, b) .

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \Leftrightarrow (ax - by, bx + ay) = (1, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y = \frac{-b}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

هذه النتيجة تقبل حل إذا كان $(a, b) \neq (0, 0)$ ومنه:

9

ليكن $(K, +, \cdot)$ جسم بحيث $K \neq \{0\}$ و e العنصر المحايد

بالنسبة للقانون . ويعتف ما يلي : $\forall a \in K : a^{-1} = -a$ (1)

(2) يبين أن : $\forall a \in K : a + a = 0$

(3) يبين أن : بدراسة $(a+e)^2$ ، أن الجسم K الذي يعتف الشرط (1)

هو الجسم $K = \{0, e\}$

(3) - أعط جدول الجمع والضرب في K .

- أعط مثلاً بسيطاً لجسم K يعتف (1)

الجواب : (1) لدينا : $\forall a \in K \setminus \{0\} : a^{-1} = -a$

نعتبر $a = e$ لأن : $e^{-1} = -e$ أي : $e + e = 0$ (لأن : $e^{-1} = -e$)

ليكن a من K لدينا : $a + a = a(e + e) = a \cdot 0 = 0$

وبما أن : $e + e = 0$ فإن : $a + a = a \cdot 0 = 0$

وبالتالي : $\forall a \in K : a + a = 0$

(2) ليكن $a \in K \setminus \{0\}$ لدينا :

$$(a+e)^2 = a^2 + e^2 + ae + ea = a^2 + e + e(a+a)$$

$$a^2 = aa = -aa^{-1} = -e \quad \text{وبما أن : } a + a = 0$$

$$(a = -a^{-1})$$

$$a + e = 0 \quad \text{أي : } (a+e)^2 = 0$$

$$-e = e^{-1} = e \quad \text{وبما : } a = -e = e$$

وبالتالي : $K = \{0, e\}$

(3) جدول الجمع والضرب في K :

x	0	e
0	0	0
e	0	e

+	0	e
0	0	e
e	e	0

$$K = \{0, \bar{1}\}$$

$$K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{مثال لجسم } K$$

x	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1
0	0	1
1	1	0

ومنه كل (a, b) من $E \setminus \{(0, 0)\}$ له مقلوب $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ بنسبة $(E, +, \cdot)$.

لكل (a, b) و (a', b') و (a'', b'') من E .

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot [(a', b') + (a'', b'')] &= (a, b) \cdot (a' + a'', b' + b'') \\ &= [a(a' + a'') - b(b' + b''), a(b' + b'') + b(a' + a'')] \\ &= [(aa' - bb') + (aa'' - bb''), (ab' + ba'') + (ab'' + ba'')] \\ &= (aa' - bb', ab' + ba') + (aa'' - bb'', ab'' + ba'') \\ &= (a, b) \cdot (a', b') + (a, b) \cdot (a'', b'') \end{aligned}$$

ومنه القانون - توزيعي بالنسبة للقانون +.

وبالتالي: $(E, +, \cdot)$ جسم تبادلي.

لذلك $(A, +, \cdot)$ حلقة و ICA (عصر أو A واحدة)

نعلم أن I مثالي من A إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالية:

$$I \neq \emptyset \quad (1)$$

$$\forall (x, y) \in I^2, x - y \in I \quad (2)$$

$$\forall (x, a) \in I \times A, xa \in I \quad (3)$$

(1) ليكن I مثالي $\neq A$ ؛ يبين أن: $1_A \in I \Leftrightarrow I = A$

(2) عسراً $(A, +, \cdot)$ حلقة مبدئية واحدة، ولكن f التجميع

من A نحو R^+ حيث: $\forall x \in A, f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y) \in A^2, f(xy) = f(x) f(y) \\ \forall (x, y) \in A^2, f(x+y) \leq \max(f(x), f(y)) \end{array} \right.$$

صع $U = \{x \in A \mid f(x) < 1\}$ و $F = \{x \in A \mid f(x) \leq 1\}$

أثبت أن $(F, +, \cdot)$ حلقة تبادلية.

$$\forall (x, y) \in U^2, x - y \in U$$

الحوا (1) ليكن I مثالي $\neq A$ ليس أن $1_A \in I \Leftrightarrow I = A$

(2) نفترض أن $1_A \in I$ ولنبين أن $I = A$.

لدينا: ICA يكفي أن يبين أن: ACI

ليكن $x = 1_A \cdot x$: لدينا :
وبما أن $1_A \in I$ و $x \in A$ فإن $x \in I$ (لأن: I مثالي)

وذن: $A \subset I$

وبالتالي: $I = A$

(\Leftarrow) بما أن $I = A$ فإن: $1_A \in I$

(2) - لنبين أن $(F, +, \cdot)$ حلقة.

لنبين أن $(F, +)$ زمرة جزئية من $(A, +)$ و F حرمستر بالنسبة للضرب \cdot .

لدينا: $0 \leq 1$ و $f(0_A) = 0$ ومنه: $0_A \in F$ لأن: $F \neq \emptyset$

ليكن x, y من F لدينا: $f(x) \leq 1$ و $f(y) \leq 1$

ومنه: $f(x-y) = f(x+(-y)) \leq \max(f(x), f(-y))$

ولذا: $f(-y) = f(-1_A y) = f(-1_A) f(y)$

$f(1_A) = f(-1_A x - 1_A) = f(-1_A) f(-1_A)$

ولذا: $f(1_A) = f(1_A \cdot 1_A) = f(1_A) f(1_A)$

أي: $f(1_A)(1_A - f(1_A)) = 0$

$f(1_A) = 0_A$ و $f(1_A) = 1_A$

وبما أن $1_A \neq 0_A$ فإن: $f(1_A) = 1_A$

ومنه: $f(-1_A) f(-1_A) = 1_A$

$f(-1_A) - 1_A = 0_A \Leftrightarrow f(-1_A) = 1_A$ و $f(1_A) = 1_A$

وبالتالي: $f(x-y) \leq \max(f(x), f(-y))$

لدينا: $f(x) \leq 1$ و $f(-y) = f(-1_A) f(y) \leq 1$

ومنه: $\max(f(x), f(-y)) \leq 1$

اذن: $f(x-y) \leq 1$

ومنه: $x-y \in F$

وبالتالي $(F, +)$ زمرة جزئية من $(A, +)$

لنبين أن F حرمستر بالنسبة للقانون \cdot .

ليكن x و y من F لدينا :

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{معاً} \quad 0 \leq f(y) \leq 1 \quad \text{و} \quad 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \text{فإن} : f(x)f(y) \leq 1$$

ومنه : $xy \in F$

بما أن x بجميع F وبالخصوص على F (لأن F مغلقاً) (FCA)

لدينا x هو رعي بالنسبة للقانون + (لأن F مغلقاً) (A)

لدينا x تبادلي في A فإنه تبادلي في F .

وبالتالي $(F, +, x)$ حلقة بآديك واحدة

ب. ليست أن \mathcal{U} مثالي من F ، لهذا الغرض نريد أن :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}^2 \quad x - y \in \mathcal{U} \quad ** \quad \mathcal{U} \neq \emptyset$$

$$*** \quad \forall (x, a) \in \mathcal{U} \times F \quad ax \in \mathcal{U} \quad (x \text{ مآدي في } F)$$

$$* \quad \text{لدينا} : f(0_A) = 0 < 1 \quad \text{فإن} : 0_A \in \mathcal{U}$$

ومنه : $\mathcal{U} \neq \emptyset$

$$** \quad \text{ليكن} \quad x, y \text{ من } \mathcal{U} \quad \text{لدينا} : f(x - y) = f(x + (-y))$$

$$\leq \max(f(x), f(-y))$$

$$\text{معاً} : f(-y) < 1 \quad \text{و} \quad f(y) < 1 \quad \text{فإن} : f(-y) < 1$$

$$\text{ولدينا} : f(x) < 1$$

$$\text{فإن} : f(x - y) \leq \max(f(x), f(-y)) < 1$$

$$\text{ومنه} : x - y \in \mathcal{U}$$

9

ليكن $(A, +, \cdot, x)$ حلقة بحيث $\forall x \in A \quad x^2 = x$

"هذه الحلقة تسمى حلقة بول Anneau de Boole"

(1) أحسب : $(x+x)^2$

(2) استنتج أن : $x+x = 0_A$

(3) ليكن x و y عنصرا من A

1- أحسب $(x+y)^2$

ب- استنتج أن $(A, +, \cdot, x)$ حلقة تبادلية

ج- استنتج قيمة $xy(x+y)$

(4) نفترض أن : $x \neq 0_A$ و $y \neq 0_A$ و $x+y$

يبين أن : 1- $x+y \neq 0_A$

2- $x+y \neq x$

3- $x+y \neq y$

(5) حدد جدول الجمع بالنسبة للعناصر $0, x, y, x+y$

www.learnit66ghz.com
الجواب : (1) لدينا لكل x من A : $(x+x)^2 = (x+x)(x+x)$

$$= xx + xx + xx + xx$$

$$= x^2 + x^2 + x^2 + x^2$$

$$= x + x + x + x \quad (x^2 = x)$$

(2) لدينا : $(x+x)^2 = x+x$ و $(x+x)^2 = xx + xx + xx + xx$

$$x + x + x + x = x + x \quad \text{ومنه :}$$

$$x + x = 0_A \quad \text{و إذن :}$$

(3) ليكن x و y من A لدينا :

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y \quad (x^2 = x, y^2 = y)$$

$$(x+y)^2 = x+y \quad \text{و} \quad (x+y)^2 = x + xy + yx + y$$

$$x + xy + yx + y = x + y \quad \text{و إذن :}$$

$$x + xy + yx + y = x + y$$

$$xy + yx = 0_A \quad \text{ومنه :}$$

$$xy + yx = xy + xy \quad \text{وبما أن :} \quad xy + xy = 0_A \quad \text{فإن :}$$

ومنه: $xy = yx$

وبالتالي: $(A, +, \times)$ حلقة تبادلية.

ج - ليكن x و y من A لدينا:

$$xy(x+y) = xyx + xy^2 = xxy + xy^2 = x^2y + xy^2 = xy + xy$$

وبما أن: $xy + xy = 0_A$ فإن: $xy(x+y) = 0_A$

(4) ليكن x و y من A بحيث $x \neq 0_A$ و $y \neq 0_A$ و $x+y$

1- نفترض أن: $x+y = 0_A$ وبما أن: $x+x = 0_A$

فإن: $x+y = x+x$ أي: $y = x$ تناقض

مع كون $x \neq y$ وبالتالي: $x+y \neq 0_A$

ب- بمصرح أن: $x+y = x$ و $y = 0_A$ ما مضى مع كون

$y \neq 0_A$ وبالتالي: $x+y \neq x$

ج- نفترض أن: $x+y = y$ إذ أن: $x = 0_A$ تناقض

ومنه: $x+y \neq y$

(5) الحلقة A تملك أربعة عناصر: $0_A, x, y, x+y$

لدينا: $\forall x \in A: x+0_A = 0_A+x = x$ و $x+x = 0_A$

+	0	x	y	x+y
0	0	x	y	x+y
x	x	0	x+y	y
y	y	x+y	0	x
x+y	x+y	y	x	0

10 ليكن $(A, +, \times)$ حلقة، وليكن f تماثل شعولي من $(A, +, \times)$

نمو $(A, +, \times)$ يجب: $\forall x \in A: f(x) = x^2$

بما أن: $\forall (x, y) \in A^2: xy = xy$

الجواب: ليكن x و y من A بما أن f شعولي فإن:

$$\exists (u, v) \in A^2: x = u^2 \text{ و } y = v^2$$

$$\text{إذ أن: } xy = u^2 \cdot v^2$$

و مسائل f تشاكل فنان $f(u+v) = f(u) + f(v)$

$$f(uv) = f(u)f(v)$$

$$(u+v)^2 = u^2 + v^2 \quad ; \quad (u+v)^2 = u^2 + v^2 \quad \text{اذن}$$

$$(uv)^2 = u^2 v^2 \quad ; \quad u^2 + uv + v^2 + uv + v^2 = u^2 + v^2 \quad \text{أي:}$$

$$(uv)^2 = u^2 v^2 \quad ; \quad uv + vu = 0_A \quad \text{وهنا:}$$

$$(uv)^2 = xy \quad ; \quad vu = -uv$$

$$(uv)^2 = (vu)^2 \quad \text{وهنا:}$$

$$xy = (vu)^2 = v^2 u^2 = yx \quad \text{اذن:}$$

$$xy = yx \quad \text{أي:}$$

$$\forall (x, y) \in A^2: \quad xy = yx \quad \text{وبالتالي:}$$

11 تكون $(A, +, \cdot)$ حلقة غير تبديلية.

نعرف القانون $*$ المعرف على A بمالي:

$$\forall (x, y) \in A^2: \quad x * y = xy - yx$$

(1) بما أن القانون $*$ غير تبديلي و A قابل مضروب

$$\forall (x, y) \in A^2: \quad x * y = -y * x \quad \text{بين أن:}$$

و أن القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$.

$$(2) \quad \forall (x, y, z) \in A^3: \quad x * (y * z) = (x * y) + z - (x * z) * y - yz$$

واستنتج قيمة التعبير التالي:

$$S = x * (y * z) + y * (z * x) + z * (x * y)$$

الجواب: (4) ليكن x, y, z من A لدينا:

$$(x * y) * z = (xy - yx) * z = (xy - yx)z - z(xy - yx)$$

$$= xyz - yxz - zxy + zyx$$

$$x * (y * z) = x * (yz - zy) = x(yz - zy) - (yz - zy)x$$

$$= xyz - xzy - yzx + zyx$$

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad \text{مسألة } (A, +, \cdot) \text{ حلقة غير تبديلية فإن}$$

وصلة * قانون غير تجميعي .

إذا كان e عنصراً محايداً للقانون * فإن : $ee - ee = 0$

لأن لكل x من A لدينا : $x * e = 0$ و $x * e \neq x$

ومن القانون * لا يقبل عنصراً محايداً .

(2) ليكن x و y من A لدينا $x * y = xy - yx = -(yx - xy)$

ومن هنا : $x * y = -y * x$

- ليكن x و y و z من A لدينا :

$$x * (y + z) = x(y + z) + (y + z)x = (xy - yx) + (xz - zx)$$

$$x * (y + z) = x * y + x * z$$

$$(y + z) * x = -x * (y + z) = -x * y - x * z = y * x + z * x$$

ومن القانون * نوزيعي بالنسبة للقانون + .

(3) ليكن x و y و z من A لدينا :

$$x * (y * z) = x * (yz - zy) = x * yz - x * zy$$

$$(x * y) * z = (xy - yx) * z = xy * z - yx * z$$

$$(x * z) * y = (xz - zx) * y = xz * y - zx * y$$

$$(x * y) * z - (x * z) * y = xy * z + zy * x - zx * y - yz * x$$

$$x * (y * z) = (x * y) * z - (x * z) * y$$

حساب S :

$$x * (y * z) = -z * (x * y) + y * (x * z)$$

$$= -z * (xy - yx) - y * (zx - xz)$$

$$x * (y * z) + y * (z * x) + z * (x * y) = 0$$

$$S = 0$$

وبالتالي :

بغير المجموعة: $A = \{a + \sqrt{2}b \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$

(1) بين أن إذا كان a, b من \mathbb{Z} فإن: $a + \sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

(2) بين أن $(A, +)$ زمرة تبادلية.

(3) بين أن: 1 - $(A, +, \times)$ حلقة.

ب- هل $(A, +, \times)$ جسم؟

(4) نعتبر التثبيت φ المعرف من A نحو \mathbb{Z} التالي:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2: \varphi(a + \sqrt{2}b) = a^2 - 2b^2$$

$$\forall (x, y) \in A^2: \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \text{بين أن:}$$

$$(5) \text{ بين أن: } (\varphi(x))^2 = 1 \Leftrightarrow x \text{ يقبل معك في } A \text{ بالسبة للقانون } x$$

(6) بين أن المجموعة التي تقبل مماثل في A هي زمرة ضربية.

الجواب: (1) لنبين أن: $a + \sqrt{2}b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$

$$(\Rightarrow) \text{ نفرض أن: } a + b\sqrt{2} = 0 \text{ ومنه: } \sqrt{2} = -a/b$$

$$\text{إذا كان } b \neq 0 \text{ فإن: } \sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ وهذا متناقض مع كون } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$\text{وبالتالي: } b = 0 \text{ ومنه: } a = 0$$

$$(\Leftarrow) \text{ إذا كان } a = b = 0 \text{ فإن: } a + \sqrt{2}b = 0$$

$$\text{وبالتالي: } a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \quad \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$$

(2) لنبين أن $(A, +)$ زمرة تبادلية. لادس يكفي أن نبين أن $(A, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}, +)$.

$$\text{لنأخذ: } A \neq \emptyset \quad 0 = 0 + 0\sqrt{2} \in A$$

ليكن x و y من A لدينا:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists (a_1, b_1) \in \mathbb{Z}^2: x = a_1 + b_1\sqrt{2}$$

$$y \in A \Leftrightarrow \exists (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^2: y = a_2 + b_2\sqrt{2}$$

$$x - y = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{2} \quad \text{ومنه:}$$

$$b_1 - b_2 \in \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad a_1 - a_2 \in \mathbb{Z} \quad \text{وبما أن:}$$

$$x - y \in A \quad \text{فإن:}$$

وبالتالي: $(A, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}, +)$ وبما أن $+$ تبادلي

٤٣- 1- ليثبت أن $(A, +, \times)$ حلقة.

ما أن $(A, +)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبين أن القانون \times تركيب داخلي في A و $(\mathbb{R}, +, \times)$ حلقة (نأخذ $A \subset \mathbb{R}$)

ليكن $x = a_1 + b_1\sqrt{2}$ و $y = a_2 + b_2\sqrt{2}$ عنصرا من A لدينا:
 $xy = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}$
 وصأن $a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Z}$ و $a_1a_2 + 2b_1b_2 \in \mathbb{Z}$
 فإن: $xy \in A$

وبما أن \times تجميعي في (\mathbb{R}, \times) فإن \times تجميعي في (A, \times)
 وبما أن \times توزيعي بالنسبة لـ $+$ في $(\mathbb{R}, +, \times)$ فهو كذلك داخل $(A, +, \times)$

وبالمثل $(A, +, \times)$ حلقة.

ب- لدينا $(A, +, \times)$ حلقة.

نكون $(A, +, \times)$ جسم إذا كان كل x من $A - \{0\}$ مقلوب في A .

لنأخذ: $x \in A - \{0\} \Leftrightarrow x = a + \sqrt{2}b$ و $(a, b) \neq (0, 0)$
 $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$

$$x^{-1} = \frac{1}{a + \sqrt{2}b} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 + 2b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2 + 2b^2} - \frac{b}{a^2 + 2b^2}\sqrt{2}$$

العددا $\frac{a}{a^2 + 2b^2}$ و $-\frac{b}{a^2 + 2b^2}$ ليسا بالضرورة عنصرا من \mathbb{Z}

(مثلا: $x = 2 + \sqrt{2} \neq 0$ و $x^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \notin A$)

ومن هنا $(A, +, \times)$ ليس جسما.

(٤) نعتبر التطبيق: $\varphi: A \rightarrow \mathbb{Z}$

$$a + b\sqrt{2} \mapsto a^2 - 2b^2$$

ليكن x و y من A بحيث $x = a_1 + b_1\sqrt{2}$ و $y = a_2 + b_2\sqrt{2}$

مع $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$

$$xy = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}$$

$$\varphi(xy) = (a_2a_2 + 2b_1b_2)^2 - 2(a_2b_1 + a_1b_2)^2 \quad \text{ولدينا}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x)\varphi(y) &= (a_2^2 - 2b_1^2)(a_2^2 - 2b_2^2) \\ &= a_2^2a_2^2 + 4a_2a_2b_1b_2 + 4b_1^2b_2^2 - 2(a_2^2b_1^2 + 2a_2a_1b_1b_2 + a_1^2b_2^2) \\ &= a_2^2a_2^2 + 4b_1^2b_2^2 - 2a_2^2b_1^2 - 2a_1^2b_2^2 \\ &= (a_2^2 - 2b_1^2)(a_2^2 - 2b_2^2) \end{aligned}$$

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \text{ومنه}$$

$$(a, b) \in \mathbb{Z}^2; (a, b) \neq (0, 0); \quad x = a + b\sqrt{2} \quad \text{لكن } x \text{ من } A \text{ حسب (5)}$$

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} \in A \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ يعقل معكثل } x \text{ في } A \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \in A \quad \Leftrightarrow$$

$$|a^2 - 2b^2| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Z} \quad \& \quad \frac{b}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Z} \right)$$

$$|\varphi(x)| = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\varphi^2(x) = 1 \quad \Leftrightarrow$$

(6) نرمز ب U لمجموعه الأعداد التي يعقل معكثل في A .

$$U = \{ a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ و } |a^2 - 2b^2| = 1 \}$$

نسب أن (U, \times) مرة . بكلية أن نسب أن (U, \times) مرة . برتبة
من (\mathbb{Q}, \times) .

$$\text{لدينا } U \neq \emptyset \quad \text{لان } 1 = 1 + 0\sqrt{2} \in U \quad (1^2 - 2 \cdot 0^2 = 1)$$

ليكن x و y من U لدينا:

$$\begin{cases} y = a_2 + b_2\sqrt{2} \\ |a_2^2 - 2b_2^2| = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = a_1 + b_1\sqrt{2} \\ |a_1^2 - 2b_1^2| = 1 \end{cases}$$

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \text{نعلم أن:}$$

$$|a_2^2 - 2b_2^2| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\varphi(x)| = 1 \quad \text{ومما أن:}$$

$$|a_1^2 - 2b_1^2| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\varphi(y)| = 1$$

$$\text{ومنه } |\varphi(xy)| = 1 \quad \text{أي: } xy \text{ يعقل معكثل في } A$$

$$x, y \in A \quad \text{إذن:}$$

نثبت أن $x^{-1} \in A$

لدينا : $| \varphi(x) | = 1$ و $x = \frac{a+b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2} \sqrt{2}$$

نضع : $B = \frac{-b}{a^2-2b^2}$ و $A = \frac{a}{a^2-2b^2}$

لدينا :

$$|A^2 - 2B^2| = \left| \frac{a^2}{(a^2-2b^2)^2} - 2 \frac{b^2}{(a^2-2b^2)^2} \right|$$

$$= \left| \frac{a^2}{(\varphi(x))^2} - 2 \frac{b^2}{(\varphi(x))^2} \right|$$

(لأن $| \varphi(x) | = 1$)

$$= |a^2 - 2b^2|$$

$$= | \varphi(x) | = 1$$

وذن $\frac{1}{x} \in \mathcal{U}$

وبالتالي (\mathcal{U}, \times) زمرة جزئية من (\mathbb{R}^*, \times) ومثل (\mathcal{U}, \times) زمرة.

13 نعتبر المجموعة $\mathbb{K} = \left\{ M(a, p) = \begin{pmatrix} a & p \\ -3p & a \end{pmatrix} \mid (a, p) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

(1) نثبت أن $(\mathbb{K}, +, \times)$ حلقة تبادلية واحدة.

(2) يبين أن $(\mathbb{K}, +, \times)$ جسم.

(3) ليكن $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

أ- يثبت أن $J \in \mathbb{K}$

ب- أحسب : J^n ($n \in \mathbb{N}$)

الجواب : (1) يكفي أن نثبت أن $(\mathbb{K}, +)$ زمرة جزئية من $(M_2(\mathbb{R}), +)$

و أن \times قانون تركيب داخلي في \mathbb{K} .

لدينا : $\mathbb{K} \neq \emptyset$ لأن $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$

لدينا : $M_2 \in \mathbb{K} \Leftrightarrow \exists (a_2, p_2) \in \mathbb{R}^2 : M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & p_2 \\ -3p_2 & a_2 \end{pmatrix}$

$M_2 \in \mathbb{K} \Leftrightarrow \exists (a_2, p_2) \in \mathbb{R}^2 : M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & p_2 \\ -3p_2 & a_2 \end{pmatrix}$

ومنه : $M_1 - M_2 = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & p_1 - p_2 \\ -3(p_1 - p_2) & a_1 - a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$

ومنه : $(\mathbb{K}, +)$ زمرة جزئية من $(M_2(\mathbb{R}), +)$

$$M_2 \times M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & p_1 \\ -3p_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & p_2 \\ -3p_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - 3p_1 p_2 & a_1 p_2 + p_1 a_2 \\ -3p_1 a_2 - 3a_1 p_2 & -3p_1 p_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix}$$

نضع : $p = a_1 p_2 + p_1 a_2$ و $d = a_1 a_2 - 3p_1 p_2$

إذن : $M_2 \times M_2 = M_2 \times M_2 = \begin{pmatrix} a & p \\ -3p & a \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$

ومنه : $(\mathbb{K}, +)$ جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), +)$

وبما أن x مجموعي و توزيعي بالنسبة لـ $+$ في $M_2(\mathbb{R})$ فإنه كذلك في \mathbb{K} ، وبالتالي $(\mathbb{K}, +, x)$ حلقة تبادلية .

(ج) لنبين أن $(\mathbb{K}, +, x)$ جسم

نمأت $(\mathbb{K}, +, x)$ حلقة . يكفي أن نبين أنه لا إذا كان .

$M \in \mathbb{K}$ و $M \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ فإن M له مقلوب في \mathbb{K} .

لدينا : $M = \begin{pmatrix} a & p \\ 3p & a \end{pmatrix}$ حيث : $(a, p) \neq (0, 0)$

نمأت : $\det M = \begin{vmatrix} a & p \\ 3p & a \end{vmatrix} = a^2 - 3p^2 \neq 0$ لأن $(a, p) \neq (0, 0)$.

فإن M له مقلوب في $(M_2(\mathbb{R}), x)$ هو :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\det M} & -\frac{p}{\det M} \\ \frac{3p}{\det M} & \frac{a}{\det M} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$$

ومنه M يقبل مقلوب في (\mathbb{K}, x)

وبالتالي : $(\mathbb{K}, +, x)$ جسم .

(د) 1- لدينا : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$ بأخذ : $a=0$ و $p=1$

ب - لدينا : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

إذن : $J^2 = -3I$ مع $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ومنه : $J^{2n} = (-3I)^n$

أي : $J^{2n} = (-3)^n \cdot I$

$J^{2n+1} = (-3)^n \cdot J$

وبالتالي : لكل n من \mathbb{N} $\begin{cases} J^{2n} = (-3)^n \cdot I \\ J^{2n+1} = (-3)^n \cdot J \end{cases}$

14 عنصر المجموعة: $A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

(1) يجب أن $(A, +, \times)$ حلقة تبديلية واحدية.

(2) هل $(A, +, \times)$ جسم؟

(3) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* : \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \alpha^n I + n\alpha^{n-1} \beta J$

مع $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

الاجاب: (1) ولتكن أن $(A, +)$ زمرة حركية من $(M_2(\mathbb{R}), +)$

لدينا: $A \neq \emptyset$ لأن $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$ (لأن $\alpha=1, \beta=0$)

لتكن M_1 و M_2 من A حيث: $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$ و $M_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$

ومنه: $M_1 - M_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \beta_1 - \beta_2 \\ 0 & \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} \in A$

اذن $(A, +)$ زمرة حركية من $(M_2(\mathbb{R}), +)$

وبالتالي $(A, +)$ زمرة تبديلية (لأن + تبديلي)

* لنبين أن \times قانون تركيب داخلي في A .

لتكن M_1 و M_2 من A حيث $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$ و $M_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$

لدينا: $M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 \\ 0 & \alpha_1 \alpha_2 \end{pmatrix}$

مع $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ و $\beta = \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1$ نحصل على: $M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in A$

ومنه \times قانون تركيب داخلي في A .

وبما أن \times تجميعي و يورثي بالنسبة ل + في $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$

فإنه كذلك في $(A, +, \times)$ (لأن $A \subset M_2(\mathbb{R})$)

وبالتالي: $(A, +, \times)$ حلقة.

وبما أن $M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1$ و $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$

فإن: $(A, +, \times)$ حلقة تبديلية وواحدية.

(3) لدينا: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \alpha \cdot I + \beta \cdot J$$

بما أن $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $I \times J = J \times I = J$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = (\alpha \cdot I + \beta \cdot J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha I)^{n-k} (\beta J)^k$$

$$= \alpha^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k J^k \quad (\text{لأن } J^2 = 0)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \alpha^n I + n\alpha^{n-1} \beta J \quad \text{ومنه:}$$

نضع : $M(a, p) = \begin{pmatrix} a+p & a-p \\ a-p & a+p \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة E المعرفة بما يلي :

$$E = \{ M(a, p) \mid (a, p) \in \mathbb{R}^2 \}$$

1. يبين أن $(E, +)$ زمرة تبادلية.

2. سن أن E حقل بالنسبة للعمليات الجبرية في $M_2(\mathbb{R})$.

3. استنتج أن (E, \times) حلقة واحدة.

4. هل الحلقة (E, \times) كاملة؟

5. يبين أن لكل $n \in \mathbb{N}$: $(M(a, p))^n = 2^{n-1} (a^n L + p^n J)$

الجواب : 1 ليعين أن $(E, +)$ زمرة تبادلية. لهذا يكفي أن يبين

أن $(E, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

لدينا : $E \neq \emptyset$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$: $(a=p=0)$

ليكن M_1 و M_2 من E حيث :

$$(a_1, p_1, a_2, p_2) \in \mathbb{R}^4 \quad M_1 = \begin{pmatrix} a_1+p_1 & a_1-p_1 \\ a_1-p_1 & a_1+p_1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} a_2+p_2 & a_2-p_2 \\ a_2-p_2 & a_2+p_2 \end{pmatrix}$$

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a_1+p_1 + a_2+p_2 & a_1-p_1 + a_2-p_2 \\ a_1-p_1 + a_2-p_2 & a_1+p_1 + a_2+p_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1+a_2) + (p_1+p_2) & (a_1+a_2) - (p_1+p_2) \\ (a_1+a_2) - (p_1+p_2) & (a_1+a_2) + (p_1+p_2) \end{pmatrix} \in E$$

ومن ثم $(E, +)$ زمرة جزئية من $(M_2(\mathbb{R}), +)$

نأخذ + تبادلي في $(M_2(\mathbb{R}), +)$ فإن $(E, +)$ زمرة تبادلية.

2. ليكن $M_1 = \begin{pmatrix} a_1+p_1 & a_1-p_1 \\ a_1-p_1 & a_1+p_1 \end{pmatrix}$ و $M_2 = \begin{pmatrix} a_2+p_2 & a_2-p_2 \\ a_2-p_2 & a_2+p_2 \end{pmatrix}$ من E

$$M_1 M_2 = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = a_1 L + p_1 J$$

$$M_2 = a_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = a_2 L + p_2 J$$

$$M_1 M_2 = (a_1 L + p_1 J)(a_2 L + p_2 J)$$

$$= a_1 a_2 L^2 + a_1 p_2 L J + p_1 a_2 J L + p_1 p_2 J^2$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2L$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2J$$

$$L J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J L = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 \times M_2 = 2d_1 d_2 L + 2\beta_1 \beta_2 J \in E$$

إذن: E جزء مستقر بالنسبة لـ X في $(M_2(R), X)$

(3) لدينا $(E, +)$ زمرة تبادلية و بما أن X قانون داخلي في E و X تجميعي وتوزيعي بالنسبة لـ $+$ في $(M_2(R), +)$ فإنه كذلك

في $(E, +, X)$.
وبما أن $I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$ هو العنصر المحايد في

$(M_2(R), X)$ فإن I هو كذلك العنصر المحايد في (E, X)

وبالتالي $(E, +, X)$ حلقة واحدة.

(4) لدينا $(E, +, X)$ حلقة غير كاملة لأن:

$$J \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad L \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{و} \quad I \neq J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) لنثبت بالتراجع: $M^n(d, \beta) = 2^{n-1} (d^n L + \beta^n J)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

من أجل $n=1$ لدينا: $M^1(d, \beta) = 2^{1-1} (d^1 L + \beta^1 J)$ صحيحة.

نفترض أن: $M^n(d, \beta) = 2^{n-1} (d^n L + \beta^n J)$

$$M^{n+1}(d, \beta) = 2^n (d^{n+1} L + \beta^{n+1} J)$$

دليت أن:

$$M^{n+1}(d, \beta) = M^n(d, \beta) \times M(d, \beta)$$

لدينا:

$$= 2^{n-1} (d^n L + \beta^n J) (d L + \beta J)$$

$$= 2^{n-1} (d^{n+1} L^2 + d^n \beta L \times J + \beta^n d J \times L + \beta^{n+1} J^2)$$

$$L \times J = J \times L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad L^2 = 2L \quad \text{و} \quad J^2 = 2J$$

بما أن:

$$M^{n+1}(d, \beta) = 2^n (d^{n+1} L + \beta^{n+1} J)$$

فإن:

$$\forall n \in \mathbb{N} : M^n(d, \beta) = 2^{n-1} (d^n L + \beta^n J)$$

وبالتالي:

16

ليكن $(G, *)$ زمرة و H_1 و H_2 زميرتان جزئيتان في G

(1) بين أن $H_1 \cap H_2$ زمرة جزئية في G .

(2) ليكن f تماثل من الزمرة $(G, *)$ نحو الزمرة (G', T)
نعمض أن e هو العنصر المحايد للتماثل $*$ في G و e' هو العنصر المحايد للقانون T في G' .

ضع $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in G\}$ و $\text{Ker } f = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$

أ- بين أن $\text{Ker } f$ زمرة جزئية في G و $\text{Im } f$ زمرة جزئية في G'

ب- بين أن $(\forall x \in \text{Ker } f)(\forall y \in \text{Ker } f) \quad x * y * x^{-1} \in \text{Ker } f$

ج- بين أن f تماثل $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{e\}$

الاجابات: (1) لدينا $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ لأن $e \in H_1 \cap H_2$

ليكن x, y من $H_1 \cap H_2$

لدينا $x \in H_1 \cap H_2 \Leftrightarrow x \in H_1 \text{ و } x \in H_2$

$y \in H_1 \cap H_2 \Leftrightarrow y \in H_1 \text{ و } y \in H_2$

بما أن H_1 و H_2 زميرتان جزئيتان في G فإن:

$$x * y^{-1} \in H_1 \quad \text{و} \quad x * y^{-1} \in H_2$$

$$x * y^{-1} \in H_1 \cap H_2 \quad \text{إذن}$$

وبالتالي $H_1 \cap H_2$ زمرة جزئية في G .

(2) أ- لدينا $f(e) = e'$ لأن f تماثل من $(G, *)$ نحو (G', T)

لذا $e \in \text{Ker } f$ ومنه $\text{Ker } f \neq \emptyset$

ليكن x, y من $\text{Ker } f$ لدينا $f(x) = e'$ و $f(y) = e'$

بما أن f تماثل فإن:

$$f(x * y^{-1}) = f(x) T f(y^{-1}) = e' T (e')^{-1} = e' T e' = e$$

$$x * y^{-1} \in \text{Ker } f \quad \text{ومنه}$$

وبالتالي $\text{Ker } f$ زمرة جزئية في G

لدينا $\text{Im } f \neq \emptyset$ لأن $f(e) = e' \in \text{Im } f$

ليكن y_1, y_2 من $\text{Im } f$ لدينا:

$$y_1 \in \text{Im } f \Leftrightarrow \exists x_1 \in G : y_1 = f(x_1)$$

$$y_2 \in \text{Im } f \Leftrightarrow \exists x_2 \in G : y_2 = f(x_2)$$

$$y_1^{-1} y_2 = f(x_1)^{-1} f(x_2) = f(x_1)^{-1} f(x_2^{-1}) \quad \text{لأن}$$

$$y_1^{-1} y_2^{-1} = f(x_1 x_2^{-1})$$

$$y_1^{-1} y_2 \in \text{Im } f \quad \text{بما أن } x_1 x_2^{-1} \in G$$

وبالتالي $\text{Im } f$ زمرة جزئية لـ G .

ب- ليكن x, y من $\text{Ker } f$ لدينا:

$$f(x * y * x^{-1}) = f(x) \tau f(y) \tau f(x^{-1})$$

$$= f(x) \tau f(y) \tau (f(x))^{-1}$$

$$\text{بما أن } f(y) = e' \text{ و } f(x) = e' :$$

$$f(x * y * x^{-1}) = e' \tau e' \tau (e')^{-1} = e' \tau e' \tau e' = e'$$

$$x * y * x^{-1} \in \text{Ker } f \quad \text{ومنه}$$

$$\text{ج- ليس، أن } \text{Ker } f = \{e'\} \Leftrightarrow f \text{ أحادي}$$

$$(\Rightarrow) \text{ نعرض أن } f \text{ أحادي، ولنبين أن } \text{Ker } f = \{e'\}$$

$$\text{لأن } \{e'\} \subset \text{Ker } f \quad (\text{لأن } f(e) = e')$$

$$\text{ليكن } x \text{ من } \text{Ker } f \text{ لدينا: } f(x) = e' = f(e)$$

$$x = e \quad \text{بما أن } f \text{ أحادي}$$

$$\text{ومنه } \text{Ker } f \subset \{e'\}$$

$$\text{وبالتالي: } \text{Ker } f = \{e'\}$$

$$(\Leftarrow) \text{ نعرض أن: } \text{Ker } f = \{e'\} \text{ ليس أن } f \text{ أحادي}$$

$$\text{ليكن } x, y \text{ من } G \text{ بحيث: } f(x) = f(y)$$

$$\text{لأن } f(x) \tau (f(y))^{-1} = e' \quad \text{أي } f(x * y^{-1}) = e'$$

$$\text{وبما أن: } \text{Ker } f = \{e'\} \text{ فإن: } x * y^{-1} = e$$

$$x = y \quad \text{ومنه } f \text{ أحادي.}$$

$$\text{والناتج: } f \text{ أحادي} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \{e'\}$$

17 نعتبر المجموعة $M = \{M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$

- (1) بين أن $(M, +, \times)$ حلقة تبديلية وواحدية. هل هي كسرية؟
- (2) حدد شروط لازم وكاف لكي يعقل $M(a,b)$ مقلوب في M
- (3) استنتج مجموعة عناصر M التي يعقل مقلوب في M
- (4) نعم. $I(p) = \{M(a,b) \in M \mid p \mid a+b\}$ (نعم).
بين أن $(I(p), +, \times)$ حلقة تبديلية.

الجواب = (1) - لنبين أن $(M, +)$ زمرة جزئية من $(M_2(\mathbb{R}), +)$

لذا $M \neq \emptyset$ لأن: $M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$

ليكن $M_1 = M(a_1, b_1)$ و $M_2 = M(a_2, b_2)$ من M

حيث $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$ لدينا:

$$M_1 - M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ b_1 - b_2 & a_1 - a_2 \end{pmatrix}$$

لأن $(a_1 - a_2, b_1 - b_2) \in \mathbb{Z}^2$ إذن $M_1 - M_2 = M(a_1 - a_2, b_1 - b_2) \in M$

ومنه $(M, +)$ زمرة جزئية من $(M_2(\mathbb{R}), +)$ إذن $(M, +)$ زمرة.

- لنبين أن القانون \times تركيب داخلي في M لدينا:

$$\begin{aligned} M_1 \times M_2 &= M(a_1, b_1) \times M(a_2, b_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 & b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix} \\ &= M(a_1 a_2 + b_1 b_2, b_1 a_2 + a_1 b_2) \in M \end{aligned}$$

لأن $a_1 a_2 + b_1 b_2 \in \mathbb{Z}$ و $b_1 a_2 + a_1 b_2 \in \mathbb{Z}$

ومنه القانون \times تركيب داخلي في M .

سأ أن \times تجميعي وسوري في النسبة لـ $+$ في $M_2(\mathbb{R})$ فإنه

كذلك في M (لأن M جزء مستقر بالنسبة لـ \times في $M_2(\mathbb{R})$)

ولذا $M_2 \times M_2 = M_2 \times M_2$ و $I = M(1,0) \in M$ العنصر المحايد (\times)

وبالتالي $(M, +, \times)$ حلقة تبديلية وواحدية.

لدينا: $M_2 = M(1, 1) \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $M_3 = M(1, -1) \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$M_2 \times M_3 = M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{3}$$

ومنه: $(M, +, \times)$ حلقة غير كاملة.

(2) ليكن $M = M(a, b)$ من M له معكوف في $M_2(R)$ يعني أن:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\det M} & -\frac{b}{\det M} \\ -\frac{b}{\det M} & \frac{a}{\det M} \end{pmatrix} \quad \bar{5} \quad \det M \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 \neq 0 \quad ; \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 - b^2} & \frac{b}{a^2 - b^2} \\ \frac{b}{a^2 - b^2} & \frac{a}{a^2 - b^2} \end{pmatrix}$$

لأن M يقبل معكوف في M إذا وفقط إذا كان $|a^2 - b^2| = 1$

$$| \det M | = 1 \quad \text{أي:} \quad a^2 - b^2 \in \{-1, 1\}$$

(3) لنك U مجموعة عناصر M التي يقبل معكوف في M .

$$\text{لدينا:} \quad M(a, b) \in U \Leftrightarrow | \det(M(a, b)) | = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 1 \quad \text{أو} \quad a^2 - b^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 1 \quad \text{أو} \quad (a+b)(a-b) = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a+b=-1 \\ a-b=-1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a+b=-1 \\ a-b=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}$$

$$U = \{M(1, 0), M(-1, 0), M(0, 1), M(0, -1)\}$$

(4) لنثبت أن $(I(p), +, \times)$ حلقة تبادلية.

- لنثبت أن $(I(p), +)$ زمرة جزئية من $(M, +)$

لدينا: $I(p) \neq \emptyset$ لأن $M(0, 0) \in I(p)$ و $p \mid 0+0=0$

ليكن $M_2 = M(a_2, b_2)$ و $M_3 = M(a_3, b_3)$ من $I(p)$

$$p \mid a_2 + b_2 \quad \text{و} \quad p \mid a_3 + b_3$$

$$\text{منه:} \quad p \mid (a_2 + b_2) - (a_3 + b_3) \quad \text{أي} \quad p \mid (a_2 - a_3) + (b_2 - b_3)$$

$$M_2 - M_3 = M(a_2 - a_3, b_2 - b_3)$$

ومنه: $M_2 - M_3 \in I(p)$ لأن $(I(p), +)$ زمرة جزئية من $(M, +)$

لنثبت أن X قانون تركيب داخلي في $I(p)$.

لدينا: $m_1 = m(a_1, b_1) \in I(p) \Leftrightarrow p | a_1 + b_1$

$m_2 = m(a_2, b_2) \in I(p) \Leftrightarrow p | a_2 + b_2$

ولدينا: $m_1 \times m_2 = m(a_1 a_2 + b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$

لدينا: $p | a_1 + b_1 \Rightarrow p | a_2(a_1 + b_1) = a_2 a_1 + a_2 b_1$

$p | a_2 + b_2 \Rightarrow p | b_1(a_2 + b_2) = b_1 a_2 + b_1 b_2$

إذن: $p | a_1 a_2 + b_1 b_2 + a_1 b_2 + b_1 a_2$

ومنه: $m_1 \times m_2 \in I(p)$

وبما أن X تجميعي ونبادلي ونورعي بالجمع لـ $+$ في $(M_1, +, X)$

فإنه كذلك في $(I(p), +, X)$

وبالتالي $(I(p), +, X)$ حلقة تبادلية.

18. تعتبر المصفوفات التالية:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) نسا أن A يعقل مقلوب ثم حدد هذا المقلوب

(2) حدد مصفوفة X التي تحقق $AX = B$.

(3) أحسب C^4 , C^3 , C^2 .

(4) عيبر المتطبيع في المعرف $M_3(\mathbb{R})$ بمبايلي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{2} C^2 + x \cdot C + I$$

حيث: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1- أحسب: $f(x)f(y)$ و $f(x+y)$.

ب- استنتج أن المصفوفة $\frac{x^2}{2} C^2 + x \cdot C + I$ تقبل مقلوب؛ حدد.

الجواب: (1) A تقبل مقلوب في $(M_3(\mathbb{R}), X)$ $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 2(6-4) - (-3+2) + 2(4-2) = 10 \neq 0$$

ومنه A تقبل مقلوب.

لنحدد A^{-1} لهذا الغرض نحدد المصفوفة $\text{Com}(A)$ المعروفة كما يلي:

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -11 & -5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} \text{ ومنه:}$$

ثم نحدد المصفوفة $\text{t}(\text{com}(A))$ المعروفة كما يلي:

$$\text{t}(\text{com}(A)) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -11 & 4 & 9 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{الأفقى يصبح عمودياً} \\ \text{والعمودى يصبح أفقياً} \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{t}(\text{com}(A)) \quad \text{ومنه:}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-11}{10} & \frac{4}{5} & \frac{9}{10} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{وبالتالي:}$$

(2) لندد مجهولة X التي نحقق:

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}B \quad \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-11}{10} & \frac{4}{5} & \frac{9}{10} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ومنه:}$$

(3) لنحسب C^4 , C^3 , C^2

$$C^4 = C^3 \cdot C = 0, \quad C^3 = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-11}{10} & \frac{4}{5} & \frac{9}{10} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{لذا}$$

(4) f - ليكن x و y من \mathbb{R} لدينا:

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= (I + xc + \frac{x^2}{2}C^2)(I + yc + \frac{y^2}{2}C^2) \\ &= I + (x+y)c + (\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2})C^2 + \frac{x^2y + xy^2}{2}C^3 + \frac{x^2y^2}{2}C^4 \end{aligned}$$

$$f(x)f(y) = I + (x+y)c + \frac{(x+y)^2}{2}C^2 \quad (C^3 = C^4 = 0) \quad \text{لذا:}$$

$$f(x)f(y) = f(x+y) \quad \text{ومنه:}$$

٤- لدينا: $f(0) = I$ ، وكل $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x)f(-x) = f(0) = I$$

لادى المصفوفة $f(x)$ قابل مقلوباً فى $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ ، وهو

$$(I + x \cdot C + \frac{x^2}{2} \cdot C^2)^{-1} = I - x \cdot C + \frac{x^2}{2} \cdot C^2 \quad \text{أى}$$

$$19 \quad \text{نعبر المصفوفة} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{حيث:} \quad (A - I)(A + 3I) = 0 \quad (1) \quad \text{نحقق من أن}$$

(2) استنتج أن A قابلة للقلب، وحد A^{-1} .

(3) أحسب A^2 بدلالة A و I .

$$(4) \text{ من أن } A^n = \mu_n \cdot A + \nu_n \cdot I \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (A^0 = I)$$

حيث (μ_n) ، (ν_n) صالبيان معرفتان بعالى:

$$\begin{cases} \mu_0 = 0 & \nu_0 = 1 \\ \mu_{n+1} = -2\mu_n + \nu_n & \nu_{n+1} = 3\mu_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(5) نضع $w_n = \mu_n + \nu_n$ ، أحسب w_{n+1} بدلالة w_n ، نأشع استنتج أن

(6) استنتج u_{n+1} بدلالة u_n .

(7) عدد u_n بدلالة n ، ثم ν_n بدلالة n .

(8) أحسب A^n بدلالة n .

$$\text{الجواب: (1) لدينا: } A + 3I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A - I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)(A + 3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$(A - I)(A + 3I) = 0 \Leftrightarrow A^2 + 3A - A - 3I = 0 \quad (2) \quad \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow A^2 + 2A = 3I$$

$$\Leftrightarrow A \left(A + \frac{2}{3}I \right) = I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I \quad \text{ومنه } A \text{ قابل للقلب}$$

$$(3) \text{ لدينا: } A^2 + 2A = 3I \quad \text{ومنه: } A^2 = 3I - 2A$$

(4) الاستقراء بالترجع :

مع أجل $n=0$ لدينا : $A^0 = I = 0A + 1I$ ، ومنه $\mu_0 = 0$ و $\nu_0 = 1$

نفترض أن : $A^n = \mu_n A + \nu_n I$

لدينا : $A^{n+1} = A^n \times A = (\mu_n A + \nu_n I) \times A$

$$= \mu_n A^2 + \nu_n A = \mu_n (3I - 2A) + \nu_n A$$

$$A^{n+1} = (-2\mu_n + \nu_n) \cdot A + 3\mu_n I$$

ومن جهة أخرى لدينا : $A^{n+1} = \mu_{n+1} A + \nu_{n+1} I$

$$\begin{cases} \mu_0 = 0 & ; & \nu_0 = 1 \\ \mu_{n+1} = -2\mu_n + \nu_n & ; & \nu_{n+1} = 3\mu_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

وبالتالي :

(5) لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} : \omega_n = \mu_n + \nu_n$

ومنه :

$$\omega_{n+1} = \mu_{n+1} + \nu_{n+1} = -2\mu_n + \nu_n + 3\mu_n$$

$$\omega_{n+1} = \mu_n + \nu_n = \omega_n$$

وبالتالي (ω_n) متساوية تسلسل

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \omega_n = \omega_0 = \mu_0 + \nu_0 = 1$$

ومنه :

(6) لدينا لكل n من \mathbb{N} : $\mu_{n+1} = -2\mu_n + \nu_n = -2\mu_n + (\omega_n - \mu_n)$

$$\mu_{n+1} = -3\mu_n + 1$$

(7) لنحدد μ_n بدلالة n .

$$\text{سأأخذ } \mu_{n+1} = -3\mu_n + 1 \quad ; \quad \frac{1}{4} = -3 \times \frac{1}{4} + 1 \quad \text{نكر } n \text{ مع } \mathbb{N}$$

$$\mu_{n+1} - \frac{1}{4} = -3 \left(\mu_n - \frac{1}{4} \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_{n+1} = -3\alpha_n \quad ; \quad \alpha_n = \mu_n - \frac{1}{4}$$

رأى (α_n) متساوية هندسية أساسها $q = -3$ ، وحدها الأول $\alpha_0 = \mu_0 - \frac{1}{4}$

$$\alpha_0 = -\frac{1}{4} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = (-3)^n \alpha_0 = -\frac{1}{4} (-3)^n$$

$$\mu_n = -\frac{1}{4} (-3)^n + \frac{1}{4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \nu_n = \omega_n - \mu_n$$

ولدينا :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \nu_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} (-3)^n$$

ومنه :

$$\forall n \in \mathbb{N} : A^n = \mu_n A + \nu_n I \quad (8) \text{ لدينا :}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2\mu_n + \nu_n & -2\mu_n & \mu_n \\ 2\mu_n & -3\mu_n + \nu_n & 2\mu_n \\ -\mu_n & 2\mu_n & \nu_n \end{pmatrix} \quad \text{وعنه :}$$

$$\cdot \nu_n = \frac{1}{4}(-3)^n + \frac{3}{4} \quad \text{حيث :} \quad \mu_n = -\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{نضع :} \quad 20$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix} \quad (1) \text{ بين أن :}$$

(2) بين أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، A^n يقبل مقلوب في $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ سم تعددية.

الحواس : (1) الاستدلال بالرجوع . نضع $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = 2^n - 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ -2a_n & -2a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{لبن أن .}$$

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ -2a_1 & -2a_0 \end{pmatrix} \quad \text{لبن أن } n=1$$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ -2a_{n+1} & -2a_n \end{pmatrix} \quad \text{نفترض أن :} \quad A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ -2a_n & -2a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{وبن أن}$$

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ -2a_n & -2a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{لبن أن .}$$

$$= \begin{pmatrix} 3a_{n+1} - 2a_n & a_{n+1} \\ -6a_n + 4a_{n-1} & -2a_n \end{pmatrix}$$

$$3a_{n+1} - 2a_n = 3(2^{n+1}-1) - 2(2^n-1) = 2^{n+2} - 2 = a_{n+2} \quad \text{بأن :}$$

$$-6a_n + 4a_{n-1} = -6(2^n-1) + 4(2^{n-1}-1) = -2(2^{n+1}-2) = -2a_{n+1}$$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ -2a_{n+1} & -2a_n \end{pmatrix} \quad \text{وعنه :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ -2a_n & -2a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\det(A^n) = (2^{n+1}-1)(2-2^n) - (2^n-1)(2-2^{n+1}) \quad (2) \text{ لدينا :}$$

$$= -2(2^n)^2 + 7 \cdot 2^n - 4 = -2 \left[(2^n - \frac{7}{4})^2 - \frac{17}{16} \right] \neq 0 \quad \left(2^n \neq \frac{7}{4} \right)$$

$$(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2a_{n-1}}{\det A^n} & -\frac{a_n}{\det A^n} \\ \frac{2a_n}{\det A^n} & \frac{a_{n+1}}{\det A^n} \end{pmatrix} \quad \text{وعنه } A^n \text{ يقبل مقلوباً في } (M_2(\mathbb{R}), \times)$$

21 تعتبر المجموعة: $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & \frac{1}{x} & e \\ 0 & y & \frac{1}{y} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} / (x, y, z, z, e, f) \in \mathbb{R}^6 \right\}$

(1) ليكن M عنصرًا من A .

حدد شرطاً لازماً وكافاً لكي تقبل M مقلوباً في $(M_3(\mathbb{R}), X)$

(2) هل M^{-1} تنتمي إلى A ؟

الجواب: 1 لتكن M من A إذن:

M قابل مقلوباً في $(M_3(\mathbb{R}), X)$ $\Leftrightarrow \det M \neq 0$

$$xyz \neq 0 \Leftrightarrow$$

(2) لنحدد M^{-1} إذا كان $M \in A$ و $xyz \neq 0$.

$$X \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} d \\ p \\ r \end{pmatrix} \quad \text{ليكن}$$

$$MX = X' \Leftrightarrow X = M^{-1}X' \quad \text{لدينا:}$$

$$MX = X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & \frac{1}{x} & e \\ 0 & y & \frac{1}{y} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d' \\ p' \\ r' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} dx + \frac{1}{x}p + er = d' \\ py + \frac{1}{y}r = p' \\ 0 = r' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{p'}{y} - \frac{1}{y}r' \\ r = \frac{r'}{y} \\ d = \frac{d'}{x} - \frac{1}{xy}p' + \left(\frac{1}{xy} - e\right)r' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} d' \\ p' \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{xy} & \frac{1}{xy} - e \\ 0 & \frac{1}{y} & -\frac{1}{y} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d' \\ p' \\ r' \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{xy} & \frac{1}{xy} - e \\ 0 & \frac{1}{y} & -\frac{1}{y} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in A \quad \text{ومنه:}$$

22 نضع : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1) احسب : A^3 و A^2

(2) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) بين أن : $(A-I)^2 = 0$

(4) استنتج : A^{-1}

الجواب : (1) لدينا : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) لنثبت بالتراجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- من أجل $n=0$ لدينا $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ صحيحة

نعم صان $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و نثبت أن : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لدينا : $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ إذن :

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) لدينا : $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(A-I)^2 = 0$ ومنه :

(4) لدينا : $(A-I)^2 = A^2 - 2A + I = 0$

$(2I-A) \times A = A \times (2I-A) = I$ أي :

ومنه $A^{-1} = 2I - A$ يقبل عكس هو :

23 نعتبر المتسلسلة (u_n) و (v_n) و (w_n) المعرّفة بمايلي :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} u_n = 3u_{n-1} + v_{n-1} \\ v_n = u_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = w_{n-1} \end{cases}$ و $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \\ w_0 = 3 \end{cases}$

الصدق من هذا التصريح هو تحديد u_n و v_n و w_n بدلالة n .

(1) بين أن : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$

حيث : A مصفوفة من $M_3(\mathbb{R})$ نتم تحديدها.

(2) استنتج أن لكل n من \mathbb{N} : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

(3) نضع : $A = I + B$ حيث $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1- أحسب : B^2 و B^3

ب- استنتج أن : $A^n = I + n \cdot B + \frac{n(n-1)}{2} \cdot B^2$

(4) أحسب : u_n و v_n و w_n بدلالة n .

الجواب : (1) لدينا : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$

وهنا : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ذن : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$

(2) بالترجع نبين أن : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N}$
حيث $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

من أجل $n=0$ لدينا : $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = A^0 \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

نفترض أن : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ و نبين أن

$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ لدينا :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} &= A \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= A \cdot A^n \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\ &= A^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

و بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

(3) نضع : $A = I + B$

1- $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ب- لدينا : $A^n = (I+B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k B^k$ (لأن : $(B^k)_{k \geq 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)

$$A^n = \sum_{k=0}^2 C_n^k B^k \quad (\text{لأن : } (B^k)_{k \geq 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

$$A^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2$$

$$A^n = I + n \cdot B + \frac{n(n-1)}{2} \cdot B^2$$

$$A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \quad (4) \text{ لدينا:}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \quad \text{ومنه:}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_n = \mu_0 + nv_0 + \frac{n(n-1)}{2} w_0 \\ v_n = v_0 + nw_0 \\ w_n = w_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_n = 1 + 2n + \frac{3}{2}(n^2 - n) \\ v_n = 2 + 3n \\ w_n = 3 \end{cases}$$

و بالتالي لكل n من \mathbb{N} .

$$\begin{cases} \mu_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} + 1 \\ v_n = 3n + 2 \\ w_n = 3 \end{cases}$$

مع $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مع $ad - bc = -2$ و $a + d = -1$ 24

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $E = \{xA + yI \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}: A \neq \lambda I$: (1) بين أن:

$A^2 = -A + 2I$: (2) بين أن:

$A^{-1} \in E$: (3) استنتج أن:

(4) بين أن $(E, +, \cdot)$ حلقة ساذجة ، هل هي كاملة ؟

(5) أحسب $\det(xA + yI)$

(6) أثبت أن المعادلة: $X^2 = X$ ، $\forall X \in E$ ، تقبل 4 حلول وهي:

I و P و Q و \mathcal{O} ، يتم تعديدها. حيث $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ب- أحسب $P \times Q$. هل P و Q قابلان للقلب.

(7) ليكن x و y وليعنا صر من R

1- أحيب مدالة P و Q الجراء التالي: $(xP+yQ) \cdot (x'P+y'Q)$

ب- استسح أن كل مصهوفه U ص E قابله للقلب فإن معلوما U^{-1} يفتي عسراً ص E .

الجواب 1: نفترض أن: $\exists \lambda \in \mathbb{R} : A = \lambda I$
 لأن $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ منه، $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
 أي $ad - bc = \lambda^2$ ، بما أن $ad - bc = -2$
 فإن: $\lambda^2 = -2$. غير ممكن

وبالتالي: $\forall \lambda \in \mathbb{R} : A = \lambda I$
 (2) لدينا: $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ad+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} a^2+ad+2 & b(a+d) \\ c(a+d) & ad+d^2+2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} a(a+d)+2 & -b \\ -c & d(a+d)+2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} -a+2 & -b \\ -c & -d+2 \end{pmatrix}$ ($a+d=2$ و $ad-bc=-2$)
 منه، $A^2 = - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 أي: $A^2 = -A + 2I$

(3) لدينا: $A^2 = -A + 2I \Leftrightarrow \frac{1}{2}(A^2 + A) = I$

$$\Leftrightarrow A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (A+I) \right) = I$$

منه، $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot (A+I)$ ، أخذ $x=y=\frac{1}{2}$

(4) لنبين أن $(E; +; \times)$ حلقة تبادلية.

- لدينا $E \neq \emptyset$: لأن $I \in E$

ليكن $M_1 = x_1 A + y_1 I$ و $M_2 = x_2 A + y_2 I$

لدينا: $M_1 - M_2 = (x_1 - x_2) \cdot A + (y_1 - y_2) \cdot I$

$M_1 - M_2 = x_3 \cdot A + y_3 \cdot I \in E$ ($x_3 = x_1 - x_2$; $y_3 = y_1 - y_2$)

منه $(E; +)$ زمرة جزئية من الزمرة السادلية $(M_2(\mathbb{R}); +)$

وبالتالي $(E; +)$ زمرة تبادلية

لنثبت أن X قانون تركيب داخلي في E .

ليكن $M_1 = x_1 A + y_1 I$ و $M_2 = x_2 A + y_2 I$ من E

لدينا $M_1 \times M_2 = x_1 x_2 A^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \cdot A + y_1 y_2 I$

$$= x_1 x_2 (-A + 2I) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \cdot A + y_1 y_2 I$$

$$= (-x_1 x_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1) \cdot A + (2x_1 x_2 + y_1 y_2) \cdot I$$

ومن ثم $M_1 \times M_2 \in E$

لذا X قانون تركيب داخلي في E

بما أن $E \subset M_2(\mathbb{R})$ فإن $(E; +; \times)$ حلقة

لدينا $M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1$ و $I \in E$

وبالتالي $(E; +; \times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

لدينا $(A + \frac{1}{2}I)^2 - \frac{9}{4}I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ؛ إذن $A^2 + A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ومن ثم $(A - I) \times (A + 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

وبما أن $\forall \lambda \in \mathbb{R} : A - \lambda I \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ فإن $\forall \lambda \in \mathbb{R} : A \neq \lambda I$

لذا $A + 2I \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $A - I \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A + 2I)(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و}$$

وبالتالي $(E; +; \times)$ حلقة غير كاملة.

(5) لنحدد $\det(xA + yI)$

$$\det(xA + yI) = \begin{vmatrix} xa+y & xb \\ xc & xd+y \end{vmatrix} \quad \text{لدينا:}$$

$$= (xa+y)(xd+y) - x^2bc = x^2ad + xy(a+d) + y^2 - x^2bc$$

$$= x^2(ad-bc) + xy(a+d) + y^2$$

$$= -2x^2 - xy + y^2 \quad (\text{بأن } ad-bc=-2 \text{ و } a+d=-1)$$

(6) لنحل في E المعادلة $X^2 = X$

$$X = xA + yI \quad \text{نضع:}$$

$$X^2 = X \Leftrightarrow (2xy - x^2)A + (2x^2 + y^2)I = xA + yI$$

$$\Leftrightarrow (2xy - x^2 - x)A = (y - 2x^2 - y^2)I$$

حسب السؤال ٤) لدينا: $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad A \neq \lambda I$

$$\begin{cases} 2xy - x^2 - x = 0 \\ y - 2x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{ومن هنا}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(2y - x - 1) = 0 \\ y^2 - 2x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ أو } 2y - x - 1 = 0 \\ y^2 - 2x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ أو } x=2y-1 \\ y^2 - 2x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$$

ومن هنا $X = P = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I$ أو $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ أو $X = I$

أو $X = Q = -\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}I$

ب- لدينا: $PQ = (\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I)(-\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ولدينا: $PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $Q \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $P \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ومن هنا P و Q قاسمان للصفر، بالتالي P و Q جبر فابولي

للقلب.

(7) أ- لدينا:

$$(xP + yQ)(x'P + y'Q) =$$

$$= xx'P^2 + xyPQ + yx'Q'P + yy'Q'^2$$

$$= xx'P^2 + yy'Q'^2 \quad (P \times Q = Q \times P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$$

لدينا: $P^2 = (\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I)^2 = \frac{1}{9}(A^2 + 4A + 4I) = \frac{1}{9}(A + 2I) = P$

$$Q^2 = \frac{1}{9}(A^2 - 2A + I) = \frac{1}{9}(-A + I) = Q$$

و بالتالي: $(xP + yQ)(x'P + y'Q) = xx'P + yy'Q$

ب- لنكن U مجموعة من \mathbb{R}^2 $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad U = xA + yI$

بمعنى: $Q = -\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}I$ و $P = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I$

فإن: $A = P - 2Q$ و $I = P + Q$

لذا: $U = x(P - 2Q) + y(P + Q) = (x+y)P + (-2x+y)Q$

ونعلم أن مما سبق: $(xP + yQ)(x'P + y'Q) = xx'P + yy'Q$

بأخذ $xx'=1$ و $yy'=1$ أي:

$$(xP + yQ) \left(\frac{1}{x}P + \frac{1}{y}Q \right) = P + Q = I$$

$$(xP + yQ)^{-2} = \frac{1}{x}P + \frac{1}{y}Q \quad \text{ومنه:}$$

$$\det U = \det(xA + yI) = -2x^2 + xy + y^2 \quad \text{بحسب السؤال 5) لدينا:}$$

$$\det U \neq 0 \Leftrightarrow -2x^2 + xy + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow U \text{ قابل للعكس في } M_2(\mathbb{R})$$

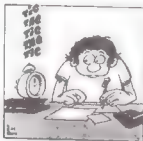
$$(x+y)(-2x+y) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x+y \neq 0 \quad \text{و} \quad -2x+y \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$U^{-2} = \frac{1}{x+y} \cdot P + \frac{1}{-2x+y} \cdot Q \quad \text{ومنه:}$$

$$Q \in \mathbb{E} \quad \text{و} \quad P \in \mathbb{E} \quad \text{وبما أن}$$

$$U^{-1} \in \mathbb{E} \quad \text{فإن}$$



الفضاءات المتجهية

I - قانون تركيب خارجي : لنك E و A مجموعتان غير فارغتين .

كل تطبيق $f: A \times E \rightarrow E$ يسمى قانوناً خارجياً على E
 $(a, x) \mapsto f(a, x)$

ذوالمعاملات في A ونكتب : $f(a; x) = a \cdot x$

ملاحظة : نعتبر فيما يلي E مجموعة مزودة :

- بقانون داخلي $+$ $*$

- بقانون خارجي $*$ \cdot

- $A = \mathbb{R}$ ونفرض $x = \vec{x}$ لكل x من E .

II - فضاء متجهي حقيقي $(E; +, \cdot)$:

زمرة تبادلية $(E; +)$

$$\forall (a, p) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \vec{x} \in E : (a \cdot p) \cdot \vec{x} = a \cdot (p \cdot \vec{x}) \quad (1)$$

$$(a + p) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + p \cdot \vec{x} \quad (2)$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2 : a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y} \quad (3)$$

$$\forall \vec{x} \in E : 1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad (4)$$

$\Leftrightarrow (E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

بعض الفضاءات المتجهة المعهدة الجبراً :

البنية	القانون الخارجي	المجموعة
$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ فضاء متجهي	$a \cdot (b, c) = (a \cdot b, a \cdot c)$	\mathbb{R}^2
$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ فضاء متجهي	$a \cdot (b, c, d) = (a \cdot b, a \cdot c, a \cdot d)$	\mathbb{R}^3
$(\mathcal{F}, +, \cdot)$ فضاء متجهي	$\forall x \in I \quad (a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$	$\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
$(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي	$a \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a & a \cdot c \\ a \cdot b & a \cdot d \end{pmatrix}$	$M_2(\mathbb{R})$
$(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي	$a \cdot \begin{pmatrix} a & d & j \\ b & e & k \\ c & f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a & a \cdot d & a \cdot j \\ a \cdot b & a \cdot e & a \cdot k \\ a \cdot c & a \cdot f & a \cdot h \end{pmatrix}$	$M_3(\mathbb{R})$

التابعات الخطية : لنك $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ متجهات من E و a_1, a_2, \dots, a_n أعداداً حقيقية .

المتجهة $\vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{x}_i$ تسمى بالفة خطية للمتجهات \vec{x}_i

ذات المعاملات a_i .

- نقول أيضاً أن الأسرة $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ تولد \vec{x}

نقول أن المتجهة B تولد E إذا كان كل عنصر \vec{x} من E مولداً للأسرة P.

الارتباط والمستقلال الخطي: لنكن $P = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ أسرة من متجهات

فضاء متجهي $(E, +, \cdot)$.
نقول أن P مرتبة خطياً أو مقيدة $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$

نقول أن P مسلسلة خطياً أو حرة $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

حاصلات: لنكن P أسرة من متجهات الفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$

- $P_1 \subset P$ و P_1 مقيدة $\Leftrightarrow P$ مقيدة.

- $P_1 \subset P$ و P_1 حرة $\Leftrightarrow P$ حرة.

- P حرة \Leftrightarrow جميع عناصر P غير معدومة ومتعلقة معاً.

أساسات فضاء متجهي $(E, +, \cdot)$: لنكن $P = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ أسرة من E

P أساس لـ E $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E \exists! (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n: \vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$

P أساس لـ E $\Leftrightarrow P$ حرة ومولدة لـ E.

العدد n يسمى بُعد E وكتب: $\dim E = n$

خاصية: $\dim E = n \Leftrightarrow$ جميع أساسات E مكونة من n متجهة

- $\dim E = 2 \Leftrightarrow (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ أساس لـ E $\Leftrightarrow (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ حرة $\Leftrightarrow \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \neq 0$

- $\dim E = 3 \Leftrightarrow (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ أساس لـ E $\Leftrightarrow (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ حرة $\Leftrightarrow \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \neq 0$

النظم الخطية من p معادلة و n مجهول x :

$$(5): \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i & (L_i) \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_n & (L_n) \end{cases}$$

طريقة كوس (Gauss) لحل النظم (5):

نعرض السطر L_i بالسطر L_1 $\frac{a_{i1}}{a_{11}} - L_1$ $(i \leq p)$ فنحصل على

نظم (5a) بحيث لا يظهر x_1 إلا في السطر L_1 ونعيد نفس العملية

على (5a) إلى أن نحصل على نظم سطرها الأخير يتضمن فقط المجهول

x_n ثم نحل هذه النظم ابتداءً من المعادلة الأخيرة.

الفضاءات المتجهية

1 ليك A و B جريشت من \mathbb{R}^3 بحيث .

$$B = \{(2h+h; 2h, 3h) | (h, h) \in \mathbb{R}^2\} \quad ; \quad A = \{(a, a+b, 2b) | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

(1) بين أن $(A, +, \cdot)$ و $(B, +, \cdot)$ مضائين متجهيين على \mathbb{R} .

(2) حدد $A \cap B$.

الحواب (1) ليس أن $(A, +, \cdot)$ فضاء متجهي على \mathbb{R} .

لدا $A \neq \emptyset$: $(0, 0, 0) \in A$

ليكن $x = (a_1, a_1+b_1, 2b_1)$ و $y = (a_2, a_2+b_2, 2b_2)$ مع A

لنا : $x - y = (a_1 - a_2; (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2); 2(b_1 - b_2))$

$x - y = (a; a + p; 2p) \in A$ ($a = a_1 - a_2 \in \mathbb{R}$; $p = b_1 - b_2 \in \mathbb{R}$)

ومنه $(A; +)$ زمرة حرتبة بآدييه من $(\mathbb{R}^3, +)$

لأن $(A, +)$ زمرة بآدييه

ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$ ليينا : $\lambda x = \lambda(a, a + b, 2b) = (\lambda a, \lambda a + \lambda b, 2\lambda b)$

ومنه : $\lambda x \in A$ $\forall x \in A$

لأن A جزء مستقر بالنسبة للقانون الخارجي .

بما أن $A \subset \mathbb{R}^3$ و $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ فضاء متجهي

فإن جميع الحاصلات المنبثقة بالنسبة للقانون الخارجي \cdot في \mathbb{R}^3

تبقى صالحة في A .

وبالتالي $(A; +, \cdot)$ فضاء متجهي على \mathbb{R} .

بنفس الطريقة بين أن $(B, +)$ زمرة بآدييه وأن B جزء مستقر

بالنسبة للقانون الخارجي \cdot . ومنه نستنتج أن $(B, +, \cdot)$ فضاء متجهي

على \mathbb{R} .

(2) لنحدد $A \cap B$.

لدينا : $(x, y, z) \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x = a = 2h + h \\ y = a + b = 2h \\ z = 2b = 3h \end{cases} \quad (a, b, h) \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{3}h \\ a = 2h + h \\ 2h + \frac{2}{3}h = 2h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2h + h \\ b = \frac{2}{3}h \\ h = -4b \end{cases}$

ومن هنا : $(2h + h; 2h, 3h) \in A \Leftrightarrow h = -4b$

وبالتالي : $A \cap B = \{(-2b; -8b, -12b) \mid b \in \mathbb{R}\}$

2. ندرس المجموعة : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 0\}$

1. من أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2. ليكن $e_1 = (1, 1, 0)$ و $e_2 = (0, 3, 1)$

3. يبين أن الأسرة $\{e_1, e_2\}$ تولد الفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$

ب. يبين أن الأسرة $\{e_1, e_2\}$ حرة

ج. استنتج $\dim E$

الاجواب : 1. لنسا ، $E \neq \emptyset$ لأن $(0, 0, 0) \in E$

ليكن $x = (x_1, y_1, z_1)$ و $y = (x_2, y_2, z_2)$ من E

بعث : $x_1 - y_1 + 3z_1 = 0$ و $x_2 - y_2 + 3z_2 = 0$

لدينا : $x - y = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \in E$

لأن $(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) + 3(z_1 - z_2) = 0$

ومن هنا $(E, +)$ زمرة جزئية وتبادلية من $(\mathbb{R}^3, +)$

وبالتالي $(E, +)$ زمرة تبادلية

ليكن $x = (a, b, c) \in E$ بحيث : $a - b + 3c = 0$ ، و $\lambda \in \mathbb{R}$

لدينا : $\lambda \cdot x = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ و $(\lambda a) - (\lambda b) + 3(\lambda c) = 0$

ومن هنا : $\lambda \cdot x \in E$ إذاً E مسعر بالقانون الخارجي .

بما أن $E \subset \mathbb{R}^3$ و $(\mathbb{R}^3, +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

إذاً جميع حاصلات القانون الخارجي تنتمي لـ E

وبالتالي : $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

$$x - y + 3z = 0 \quad \text{نكتب } E = (x, y, z) \text{ نكتب}$$

$$(x, y, z) = (x, x + 3z, z) \quad \text{و} \quad y = x + 3z$$

$$= (x, x, 0) + (0, 3z, z)$$

$$= x(1, 1, 0) + z(0, 3, 1)$$

$$\forall x \in E : \quad x = x \cdot e_1 + z \cdot e_2 \quad \text{ومن هنا}$$

يُراد أن $\{e_1, e_2\}$ أسرة تولد الفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$

ب- ليكن (x, z) من \mathbb{R}^2 بحيث: $xe_1 + ze_2 = 0_E$

نثبت أن: $x = z = 0$

$$xe_1 + ze_2 = 0_E \Leftrightarrow (x, x + 3z, z) = (0, 0, 0) \quad \text{لدينا}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{و} \quad x + 3z = 0 \quad \text{و} \quad z = 0$$

$$\Leftrightarrow x = z = 0$$

وبالتالي الأسرة $\{e_1, e_2\}$ حرة.

ج- مثال الأسرة $\{e_1, e_2\}$ حرة وتولد الفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$

بيان $\{e_1, e_2\}$ أساس للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$

وبالتالي: $\dim E = 2$

3. ندرس المجموعات التالية

$$A = \{f \in f(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(5) = f(1)\}$$

$$B = \{f \in f(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(5) = 2 + f(1)\}$$

$$C = \{f \in f(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0\}$$

نريد من هذه المجموعات نعلم ما هي الجمع والفرق ما هي عدد حقيقي حدد ما هي هذه المجموعات المتعددة التي هي غير على نفس الفضاء متجهي

الاجواب : . لدينا: $A \neq \emptyset$ لأن $0 \in A$ الدالة الصفرية.

ليكن f و g عنصرين من A ، إذن $f(5) = f(1)$ و $g(5) = g(1)$

ومن هنا: $f(5) - g(5) = f(1) - g(1)$ ، إذن $f - g \in A$

ليكن f من A و $\lambda \in \mathbb{R}$ إذن $f(5) = f(1)$ ومنه $\lambda f(5) = \lambda f(1)$
 إذن $\lambda f \in A$ ومنه A جزء مستقر بالقانون الخارجي .
 وبما أن : $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ و $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي
 فإن جميع حاصلات القانون الخارجي في $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ تسمى بالـ
 في A ؛ وبالتالي $(A; +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .
 - لدينا : $B \neq \emptyset$ لأن : $x \mapsto \frac{1}{2}x$ تنتمي إلى B .
 ولدينا : $x \mapsto x$ تنتمي إلى B لأن $x \mapsto \frac{1}{2}x$ تنتمي إلى B
 ومنه B غير مستقر بالقانون الخارجي .
 وبالتالي $(B; +, \cdot)$ ليس فضاء متجهي .
 - لدينا : $C \neq \emptyset$ لأن : $x \mapsto x^2$ تنتمي إلى C
 ولدينا : $-2x^2$ لا تنتمي إلى C لأن $x \mapsto -2x^2$ لا تنتمي إلى C .
 ومنه C غير مستقر بالقانون الخارجي .
 وبالتالي $(C; +, \cdot)$ ليس فضاء متجهي .

$E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. 4

(1) مع أن $(E, +, \cdot)$ حقل، فكل عنصر حقيقي من \mathbb{R} هو عدد أولي في E
(2) - عدد أساسي للبناء المزدوج $(E, +, \cdot)$ من النسخة \mathbb{R}

الجواب = (1) لدينا: $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$ ، أيضا: $a=b=0$ ،
 $M_2 = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1-b_1 \end{pmatrix}$ مع E ، $M_1 = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1-b_1 \end{pmatrix}$ (نكسر)
 $M_2 - M_1 = \begin{pmatrix} (a_1-a_1) + (b_1-b_1) & (b_1-b_1) \\ -(b_1-b_1) & (a_1-a_1) - (b_1-b_1) \end{pmatrix}$ لدينا:

و منه $M_2 - M_3 \in E$ و ادن $(E, +)$ زمرة حرة مبداءه هو

الزمرة التبديلية $(M_2(\mathbb{R}); +)$

وبالتالي $(E; +)$ زمرة تبديلية.

ليكن λ عدد حقيقي و $M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ من E لدينا،

$$\lambda.M = \begin{pmatrix} (\lambda a) + (\lambda b) & (\lambda b) \\ -(\lambda b) & (\lambda a) - (\lambda b) \end{pmatrix} \in E$$

ومنه : جزء مستقر بالقانون الخارجى .

بما أن $E \subset M_2(\mathbb{R})$ و $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

فإن جميع خاصيات القانون الخارجي . تنطبق مباشرة في E

وبالتالي: $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

ليكن M من E لدينا:

$$M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ و } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ نضع:}$$

فإن $\{I, J\}$ أسرة مولدة لـ E .

(4) نبين $\{I, J\}$ أسرة حرة .

ليكن $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ بحيث:

$$a \cdot I + b \cdot J = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=0$$

وهذا يعني أن $\{I, J\}$ أسرة حرة ، و ما أنهما مولدة لـ E

فإن $\{I, J\}$ أساساً للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$

وبالتالي: $\dim E = 2$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

نعتبر المجموعة: M فضاء متجهي حقيقي ثم حدد بصره .

5

الجواب: .. لدينا: $M \neq \emptyset$ لأن: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$

ليكن $M_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & x_1 \end{pmatrix}$ و $M_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 & y_2 \\ y_2 & y_2 & x_2 \end{pmatrix}$ من M

$$M_1 - M_2 = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & y_1 - y_2 \\ y_1 - y_2 & x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ y_1 - y_2 & y_1 - y_2 & x_1 - x_2 \end{pmatrix} \in M$$

وهذا يعني أن $(M, +)$ زمرة جزئية تبديلية من الزمرة التبادلية $(M_3(\mathbb{R}), +)$

وبالتالي: $(M, +)$ زمرة تبديلية

ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$\lambda \cdot M_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_2 & \lambda y_2 & \lambda y_2 \\ \lambda y_2 & \lambda x_2 & \lambda y_2 \\ \lambda y_2 & \lambda y_2 & \lambda x_2 \end{pmatrix} \in M$$

إذاً E جزء مستقر بالقانون الخارجي . .

من أجل : $E \subset M_2(\mathbb{R})$ و $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

فيكون جميع خاصيات القانون الخارجي . في $M_2(\mathbb{R})$ تبقى صالحة في E

وبالتالي $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

$$\begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{نضع } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذاً : $\{I, J\}$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$

ليكن $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ بحيث : $x \cdot I + y \cdot J = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0$$

ومنه $\{I, J\}$ أسرة حرة ، وبالتالي $\{I, J\}$ أساس للفضاء

المتجهي $(E, +, \cdot)$ ومنه : $\dim E = 2$

6

في \mathbb{R}^3 نعتبر الأسرة $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ حيث

$$\vec{e}_3 = (0, 0, 1) \text{ و } \vec{e}_2 = (0, 1, 0) \text{ و } \vec{e}_1 = (1, 0, 0)$$

(1) من أجل \mathcal{B} أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

(2) نعتبر المتجهات : $\vec{x}_1 = (1, 1, 1)$ و $\vec{x}_2 = (1, -1, 1)$ و $\vec{x}_3 = (1, 2, 3)$

أ- من أجل $\mathcal{B}' = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

ب- لتكن $\vec{x} = (3, 4, 5)$ صحفه من \mathbb{R}^3 .

- حدد إحداثيات المتجهة \vec{x} بالنسبة للأساس \mathcal{B} .

- حدد إحداثيات المتجهة \vec{x} بالنسبة للأساس \mathcal{B}' .

الجواب : (1) لدينا لكل $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$$

$$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$$

$$(x, y, z) = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3$$

إذاً : $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$$\text{لدينا : } x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0$$

ومنه $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ أسرة حرة ، وبالتالي $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ أساس لـ $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

٤) لتبين أن كل أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

لدينا : $\det(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

وبالتالي β' مرتبة وعا $\dim \mathbb{R}^3 = \text{Card } \beta = 3$ فإن :

$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ كل أساس للفضاء المتجهي $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$

ب - لدينا : $\vec{x} = (3, 4, 5) = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$

ومنه $(3, 4, 5)$ هو متكون لإحداثيات \vec{x} بالمبنية للأساس β .

ليكن (α, β, γ) متكون لإحداثيات \vec{x} بالمبنية للأساس β' .

لذا فإن : $\vec{x} = \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \gamma\vec{x}_3$

$(3, 4, 5) = (\alpha + \beta + \gamma; \alpha - \beta + 2\gamma; \alpha + \beta + 3\gamma)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 4 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$

ومنه $(2, 0, 1)$ هو متكون لإحداثيات \vec{x} بالمبنية للأساس β' .

7 نس الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ بعض المتجهات :

$\vec{w} = (1, 2, 3)$ و $\vec{v} = (1, 2, m)$ و $\vec{u} = (m, 2, 1-m)$

أدرس حسب قيم m اتجاه المتجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} .

الجواب : لدينا : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1-m & m & 3 \end{vmatrix}$

$= m \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1-m & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-m & 3 \end{vmatrix} + (1-m) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1-m & 3 \end{vmatrix}$

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 2(3-m)(m-1)$

لذا إذا كان : $m=1$ أو $m=3$ فإن : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

ومنه المتجهات $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ متجهة .

لذا إذا كان : $m \neq 1$ و $m \neq 3$ فإن : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$

ومنه المتجهات $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ حرة .

8

لنك \mathcal{B} مجموعة الحدوديات التي درجتها أقل من أو تساوي

2 بحيث: $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{B}_2, +, \cdot)$

(2) بين أن الأسس:

$$\mathcal{B} = \{(1+x)^0, x(1+x)^3, x^2(1+x)^4, x^3(1+x), x^4\}$$

أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{B}_2, +, \cdot)$

(3) حدد إحداثيات الحدودية $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$

بالنسبة للأساس \mathcal{B} .

الجواب: (1) ليثبت أن \mathcal{B} أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{B}_2, +, \cdot)$

نضع: $\vec{e}_1 = (1+x)^0$ $\vec{e}_2 = x(1+x)^3$

$\vec{e}_3 = x^2(1+x)^4$; $\vec{e}_4 = x^3(1+x)$; $\vec{e}_5 = x^4$

أيضاً: $x^4 = x^4 = \vec{e}_5$; $(1+x) - x = 1$

$x^3 = x^3[(1+x) - x] = x^3(1+x) - x^4 = \vec{e}_4 - \vec{e}_5$

$x^2 = x^2[(1+x) - x]^2 = x^2[(1+x)^2 - 2x(1+x) + x^2]$

$x^2 = x^2(1+x)^2 - 2x^3(1+x) + x^4 = \vec{e}_3 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_5$

$x = x[(1+x) - x]^3 = x[(1+x)^3 - 3x(1+x)^2 + 3x^2(1+x) - x^3]$

$x = x(1+x)^3 - 3x^2(1+x)^2 + 3x^3(1+x) - x^4$

$x = \vec{e}_3 - 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_4 - \vec{e}_5$

$1 = [(1+x) - x]^4 = [(1+x)^4 - 4x(1+x)^3 + 6x^2(1+x)^2 - 4x^3(1+x) + x^4]$

$1 = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4 + \vec{e}_5$

هنا أن جميع عناصر \mathcal{B}_0 يكتب بدلالة عناصر \mathcal{B} ما بين

\mathcal{B} أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{B}_2, +, \cdot)$.

(2) لإحداثيات f بالنسبة للأساس \mathcal{B} .

أيضاً: $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$

$= (\vec{e}_4 - \vec{e}_5) + 2(\vec{e}_3 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_5) - (\vec{e}_3 - 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_4 - \vec{e}_5) + (\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4 + \vec{e}_5)$

$f(x) = \vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 11\vec{e}_3 - 10\vec{e}_4 + 3\vec{e}_5$

ومنه: $(1, -5, 11, -10, 3)$ هي إحداثيات f بالنسبة للأساس \mathcal{B}

9

تكن مجموعة الدوال العددية التي درجتها أقل من 3 أو تساوي 2. الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ مرسوم إلى الأساس $\mathcal{B}_0 = \{1, x, x^2\}$.

نعتبر الدوال العددية التالية:

$$f: x \mapsto x^2 + x + 1, \quad g: x \mapsto mx^2 + 3, \quad h: x \mapsto -x^2 - x + 3$$

(1) حدد حجم العدد m لكي تكون الأسس $\{f, g, h\}$ أساساً للفضاء المتجهي \mathcal{B}_0 .

(2) لتكن $p = (-5, 2, 2)$ في الأساس \mathcal{B}_0

حدد إحداثيات p في الأساس $\{f, g, h\}$

الحواب: (1) ليس: $\det(f, g, h) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & m & -2 \end{vmatrix} = 4m$

الأسس $\{f, g, h\}$ حرة $\Leftrightarrow \det(f, g, h) \neq 0$
 $\Leftrightarrow m \neq 0$

(2) لدينا: $\{f, g, h\}$ أساساً للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

لتكن (α, β, γ) إحداثيات p في الأساس $\{f, g, h\}$.

$$-5 + 2x + x^2 = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) + \gamma \cdot h(x)$$

$$-5 + 2x + x^2 = \alpha(x^2 + x + 1) + \beta(2x^2 + 3) + \gamma(-x^2 - x + 3)$$

$$= (\alpha + 2\beta - \gamma)x^2 + (\alpha - \gamma)x + (\alpha + 3\beta + \gamma)$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = -5 \\ \alpha - \gamma = 2 \\ 2\alpha + 2\beta - \gamma = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 7 \\ \beta = -5 \\ \gamma = 5 \end{cases} \quad \text{منه.}$$

لذا: $p = 7f - 5g + 5h(x)$

10 رمز ب (3) لمجموعة الدوال المستقلة على $[a, b]$ حيث: $a < b$

$$\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{B} \mid \exists \lambda > 0 \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq \lambda |x| \}$$

(1) يبين أن: $f(0) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{E}$

(2) يبين أن $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

(3) يبين أن الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = \sin x$ هي عنصر من \mathcal{E} .

الحواب: (1) لدينا: $f \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda > 0 \\ \forall x \in [a, b] \end{cases} |f(x)| \leq \lambda |x|$

بما أن: $0 \in [a, b]$ فإن: $|f(0)| \leq A \cdot 0 = 0$ و $ab < 0$ و $0 < b$

$$f(0) = 0 \quad \text{ومن هنا:}$$

(2) لنثبت أن $(E; +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

لدينا: $E \neq \emptyset$ لأن الدالة المعدمة تنتمي إلى E .

$$f \in E \Leftrightarrow f \in \mathcal{B} \quad \text{و} \quad (\exists A > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq A|x|)$$

$$g \in E \Leftrightarrow g \in \mathcal{B} \quad \text{و} \quad (\exists B > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad |g(x)| \leq B|x|)$$

$$f, g \in E \Rightarrow f + g \in \mathcal{B} \quad \text{فإن:} \quad (f, g) \in \mathcal{B}^2$$

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b] \quad |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq A|x| + B|x| \\ &\leq (A+B)|x| \end{aligned}$$

$$\text{إذن:} \quad \forall x \in [a, b] \quad |(f+g)(x)| \leq C|x| \quad \text{حيث} \quad C = A+B > 0$$

$$\text{وبالتالي:} \quad f+g \in E$$

ومن هنا $(E, +)$ زوجة مرتبة تبادلية مع الزمرة التبادلية

$$(\mathcal{B}, +) \quad \text{و} \quad (E, +) \quad \text{زوجتان تبادليتان.}$$

$$\text{ليكن } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{لدينا:} \quad \lambda f \in \mathcal{B} \quad \text{و} \quad |\lambda f(x)| \leq |\lambda A| |x| \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\text{إذن:} \quad \lambda f \in E$$

ومن هنا E جزء مستقر بالقانون الخارج. و بما أن $(f, (a, b), \mathbb{R})$ و $(f, (a, b), \mathbb{R})$

فضاء متجهي حقيقي و $E \subset \mathcal{F}((a, b), \mathbb{R})$ فإن جميع حاصلات

القانون الخارج. في $\mathcal{F}((a, b), \mathbb{R})$ تبقى صالحة في E

وبالتالي $(E; +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

$$(3) \text{ لنثبت أن: } f \in E \quad \text{حيث:} \quad f(x) = \sin x \quad \text{و} \quad x \in [a, b] \quad \text{و} \quad ab < 0$$

$$\text{لدينا:} \quad f \in \mathcal{B} \quad \text{كل } x \text{ حيث } ab < 0$$

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq |x| \quad \text{لأن:} \quad |\sin x| \leq |x| \quad \text{نعتبر:} \quad A=1$$

$$\text{وبالتالي:} \quad f \in E$$

لدينا: $\forall (f, g) \in (R_n[X])^2 : f - g \in R_n[X]$.
ومنه: $(R_n[X]; +)$ زمرة جبرية تبديلية من الزمرة $(R[X]; +)$.

لدينا: $\forall f \in R_n[X] \forall \lambda \in R \quad \lambda \cdot f \in R_n[X]$

ومنه: $R_n[X]$ جزء مستقر بالقانون الخارجى ..

وبالتالى $(R_n[X]; +, \cdot)$ فضاء متجهى حقيقي.

(2) لدينا: $\forall f \in R_n[X] \exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1} : f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

ومنه $(a_0, a_1, \dots, a_n) = \mathcal{B}$ أسرة تولد الفضاء المتجهى $(R_n[X]; +, \cdot)$

لكن $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$ بحيث $\sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$

$$\forall x \in R : a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ a_{n-1} = 0 \\ \vdots \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

ومنه \mathcal{B} أسرة حرة وبالتالى فإن \mathcal{B} أساس الفضاء المتجهى

$(R_n[X]; +, \cdot)$ ومنه: $\dim(R_n[X]) = n+1$

(3) 1- لدينا: $f_k(x) = (x-a)^k$ و $f_0(x) = x^k$

لدينا: $f_0 = g_0 + 0 \cdot g_1 + \dots + 0 \cdot g_n$

$$\forall k \geq 1 : f_k(x) = x^k = [(x-a) + a]^k \\ = \sum_{i=0}^k C_k^i a^{k-i} (x-a)^i$$

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^k C_k^i a^{k-i} \cdot g_i(x)$$

$$f_k = \sum_{i=0}^k C_k^i a^{k-i} \cdot g_i$$

ومنه:

ب- لدينا: $\forall f \in R_n[X] \exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1} : f = \sum_{k=0}^n a_k \cdot f_k$

$$f = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k (a_k C_k^i a^{k-i}) g_i$$

ومنه $\mathcal{B}' = (g_0, g_1, \dots, g_n)$ أسرة تولد الفضاء $R_n[X]$

وبما أن: $\dim \mathcal{B}' = \dim R_n[X] = n+1$

فإن \mathcal{B}' أساس الفضاء المتجهى $R_n[X]$.

(4) أ- لدينا f دالة حدودية بإذن فهي متصلة على \mathbb{R} ، لنكن F دالة

أصلية لـ f على \mathbb{R} ، إذن: $\forall x \in \mathbb{R}^*: \tilde{f}_0(x) = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$

F هي كذلك دالة حدودية، ومنه \tilde{f}_0 دالة متصلة على \mathbb{R}^* .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{F(2x) - F(x)}{2x} \right) - \left(\frac{F(x) - F(0)}{x} \right)$$

$$= 2F'(0) - F'(0) = 2f(0) - f(0) = f(0) = \tilde{f}_0(0)$$

ومنه \tilde{f}_0 متصلة في $x_0 = 0$ ، وبالتالي \tilde{f}_0 متصلة على \mathbb{R} .

ب- لدينا: $\forall h \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R}^* \tilde{f}_h(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} t^h dt$

$$= \frac{1}{x} \left[\frac{t^{h+1}}{h+1} \right]_x^{2x} = \frac{1}{x} \left[\frac{(2x)^{h+1}}{h+1} - \frac{x^{h+1}}{h+1} \right]$$

ومنه: $\forall h \in \mathbb{N} : \tilde{f}_h(x) = \frac{1}{h+1} ((2x)^{h+1} - x^{h+1})$

ج- لدينا كل h من \mathbb{N} : $\tilde{f}_h(x) = \frac{1}{h+1} ((2x)^{h+1} - x^{h+1})$ ، إذن: $\tilde{f}_h \in \mathcal{R}_n[X]$

نكن $f \in \mathcal{R}_n[X]$ ، إذن: $f = \sum_{k=0}^n a_k f_k$ ، $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \tilde{f}(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} f(t) dt = \frac{1}{x} \int_x^{2x} \sum_{k=0}^n a_k f_k(t) dt$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^n a_k \int_x^{2x} f_k(t) dt$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{1}{x} \int_x^{2x} f_k(t) dt \right)$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^n a_k \tilde{f}_k(x)$$

$$\tilde{f} = \sum_{k=0}^n a_k \tilde{f}_k$$

ومتفقاً كذلك من أجل $x=0$ ، ومنه:

وبما أن: $\tilde{f}_k \in \mathcal{R}_n[X]$ ، فإن: $\tilde{f} \in \mathcal{R}_n[X]$

(4) لنكن $f \in \mathcal{R}_n[X]$ ، بحيث: $\tilde{f} = 0$

أ- لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}^* : \tilde{f}(x) = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$

$$\tilde{f}(0) = f(0)$$

وبما أن: $\tilde{f} = 0$ ، فإن: $\forall x \in \mathbb{R}^* : F(2x) = F(x)$

لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}^* : 2f(2x) = f(x)$ ، إذن: $(F(2x))' = (F(x))'$

ومتفقاً من أجل $x=0$ ، وبالتالي: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 2f(2x)$

ب- لنثبت بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N} \cdot f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2^n f(x)$

من أجل $n=0$ لدينا: $f\left(\frac{x}{2^0}\right) = 2^0 f(x)$ صحيحة.

نفترض أن $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2^n f(x)$ ونثبت أن $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2^{n+1} f(x)$

لدينا: $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) &= 2 f\left(\frac{x}{2^n}\right) \\ &= 2 \cdot 2^n f(x) \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2^{n+1} f(x)$$

وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N} : f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2^n f(x)$

ج- لنثبت أنه: $f=0$

نفترض أن $f \neq 0$ أي:

$$\exists x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0$$

لما $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ ، f متصلة على \mathbb{R} ، $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2^n f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0) \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n f(x) = +\infty \quad \text{حيث} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

ومنه: $f(0) = \infty$ غير ممكن لأن f متصلة في $x_0=0$

وبالتالي: $f=0$

12 يعبر عن الفضاء المتجهي \mathbb{R}^3 المتجهات

$$\vec{u} \begin{pmatrix} \sin(x+a) \\ \sin(x+b) \\ \sin(x+c) \end{pmatrix} ; \quad \vec{v} \begin{pmatrix} \sin a \\ \sin b \\ \sin c \end{pmatrix} ; \quad \vec{w} \begin{pmatrix} \cos a \\ \cos b \\ \cos c \end{pmatrix}$$

حيث a, b, c, x أعداد حقيقية

نثبت أن الأسرة $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ مقيدة

الجواب: لدينا:

$$\sin(x+a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$$

$$\sin(x+b) = \sin x \cos b + \cos x \sin b$$

$$\sin(x+c) = \sin x \cos c + \cos x \sin c$$

$$\begin{pmatrix} \sin(x+a) \\ \sin(x+b) \\ \sin(x+c) \end{pmatrix} = \sin x \begin{pmatrix} \cos a \\ \cos b \\ \cos c \end{pmatrix} + \cos x \begin{pmatrix} \sin a \\ \sin b \\ \sin c \end{pmatrix} \quad \text{ومنه}$$

$$\vec{u} = (\sin x) \vec{w} + (\cos x) \vec{v}$$

وهذه الأسرة $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ مقيدة.

13 تغير المتجهية $E = \{f \in f(R, R) / f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{3x}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

(1) بين أن : $E \neq \emptyset$ وأن : $f + p \cdot g \in E$:
 $\forall (f, g) \in E^2$: $f + p \cdot g \in E$:
 $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$:
 ب - استنتج أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

(2) نعتبر الأسرة $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2)$ حيث :

$$f_0(x) = e^{3x}, \quad f_1(x) = x e^{3x}, \quad f_2(x) = x^2 e^{3x}$$

بين أن \mathcal{B} أساس للفضاء E .

(3) ليكن f عنصر من E بين أن : $f \in E$ و حدد إحداثيات f بالأساس \mathcal{B}

الاجواب = نعم أن : $(f(R, R), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

أ - لدينا : $E \neq \emptyset$ (لأن : $f_0 = 0 \in E$: الدالة المعتمدة)

$$f \in E \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$$

$$g \in E \Leftrightarrow \exists (a', b', c') \in \mathbb{R}^3 : g(x) = (a'x^2 + b'x + c')e^{3x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : (af + pg)(x) = ((a+a')x^2 + (b+b')x + (c+c'))e^{3x}$$

$$= (a+a')x^2 + (b+b')x + (c+c')e^{3x} \in E$$

www.learnit.66ghz.com

ب - لدينا بالأساس : $a=1$ و $b=-1$

$$\forall (f, g) \in E^2 : f - g \in E$$

لأن $(E, +)$ زمرة جزئية من $(f(R, R), +)$

$$\forall f \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot f \in E$$

فإن E مستقر بالقانون التركيب الخارجي . ومنه جميع حاصلات

\cdot في $(f(R, R), \cdot)$ تبقى صالحة في E

وبالتالي $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

(2) لنبين أن $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2)$ أساس للفضاء E .

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = ax^2 e^{3x} + bx e^{3x} + c e^{3x}$$

$$= a f_2(x) + b f_1(x) + c f_0(x)$$

$$\forall f \in E : f = a \cdot f_2 + b \cdot f_1 + c \cdot f_0$$

ومنه \mathcal{B} أسرة مولدة للفضاء E .

ليبين أن الأسرة \mathcal{B} حرة.

ليكن $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ بحيث $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) = 0$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) e^{3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

ومنه: \mathcal{B} أسرة حرة، وبالتالي \mathcal{B} أساس للفضاء E

(3) ليكن f من E ، ليبين أن: $f' \in E$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$$

$$\text{حيث } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{لدينا: } f'(x) = (3ax^2 + (3b+2a)x + b+3c)e^{3x}$$

$$f'(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{3x}$$

$$\text{حيث } \alpha = b+3c, \quad \beta = 3b+2a, \quad \gamma = 3a$$

$$\text{ومنه: } f' \in E$$

لدينا: (a, b, c) هي إحداثيات f بالنسبة للأساس \mathcal{B}

و $(3a, 3b+2a, b+3c)$ هي إحداثيات f' بالنسبة للأساس \mathcal{B} .

14 ليكن $\lambda = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ حيث $\lambda^2 = -1$

$$E = \{ a + by \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$$

(1) بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

(2) حدد أساساً \mathcal{B} للفضاء $(E, +, \cdot)$ ثم حدد $\dim E$

(3) بين أن للأسرة $\{1, y\}$ هي كذلك أساس للفضاء $(E, +, \cdot)$

(4) حدد إحداثيات y في الأساس \mathcal{B}

(5) بين أن $E = \mathbb{C}$

الجواب: (1) لدينا: $E \subset \mathbb{C}$ و $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

$$\text{لدينا: } z_1 = a_1 + b_1 y \text{ و } z_2 = a_2 + b_2 y \Leftrightarrow (z_1, z_2) \in E^2 \Leftrightarrow (a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)y$$

$$\text{ومنه: } z_1 - z_2 \in E$$

لدينا . قانون تركيب خارجي في E وبما أن $E \subset \mathbb{C}$ ومنه جميع خواصيات المتبقية من تعريف الفضاء المتجهي تبقى صحيحة في E .

وبالتالي : $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

(2) لدينا : $\forall z \in E : z = a + bz$

ومنه : $\mathcal{B} = \{1, z\}$ أسرة مولدة

لنبين أن $\mathcal{B} = \{1, z\}$ حرة .

ليكن a و b من \mathbb{R} لدينا : $a + bz = 0$

$$\Leftrightarrow a + b(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 0 \Leftrightarrow (a - \frac{b}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}bz = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}bz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

إذن : $\mathcal{B} = \{1, z\}$ أسرة حرة ، وبما أن \mathcal{B} أساس للفضاء

المتجهي E ، وبما أن $\dim \mathcal{B} = 2$ فإن $\dim E = 2$

(3) لنساكن z من E : $z = a + bz = a - \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}bz$

إذن : $\{1, z\}$ أسرة مولدة لـ E

وبما أن $\{1, z\}$ أسرة حرة فإن $\{1, z\}$ أساس لـ E

(4) لنحدد إحداثيات z في الأساس \mathcal{B} .

$$\text{لدينا : } z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

ومنه $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ هو زوج إحداثيات z في الأساس \mathcal{B} .

(5) لدينا : $E \subset \mathbb{C}$. لنبين أن $\mathbb{C} \subset E$

ليكن z من \mathbb{C} لدينا : $z = x + iy$ $\exists! (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{لدينا : } z = (x + \frac{\sqrt{3}}{3}y) + \frac{2y\sqrt{3}}{3}i \quad \text{فإن : } z = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

إذن : $z \in E$ ومنه : $\mathbb{C} \subset E$

وبالتالي : $E = \mathbb{C}$

15 نعتبر المجموعة: $A = \{M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$

(1) بين أن $(A, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

(2) حدد أساساً للفضاء المتجهي $(A, +, \cdot)$ ثم بعده .

(3) نعتبر المصفوفات: $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

هل الأسرة $\{A, B, C\}$ أساس للفضاء A ؟

الجواب : (1) نعلم أن $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

لدينا : $A \subset M_3(\mathbb{R})$ و $A \neq \emptyset$

$$M(a_1, b_1, c_1) - M(a_2, b_2, c_2) = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$$

$$M(a_1, b_1, c_1) - M(a_2, b_2, c_2) \in A$$

ومنه : $(A, +)$ زمرة جزئية من الزمرة التبادلية $(M_3(\mathbb{R}), +)$

وبالتالي $(A, +)$ زمرة تبادلية .

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot M(a, b, c) = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$$

ومنه : قانون تركيب خارجي في A

وبالتالي $(A, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

(2) لنك $M(a, b, c)$ من A لدينا :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_3}$$

لذا : $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ أسرة تولدة للفضاء المتجهي $(A, +, \cdot)$

لنبين أن الأسرة $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ حرة .

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = 0_A$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

لذا : $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ أسرة حرة ومنه $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ أساس للفضاء A

وبالتالي : $\dim A = 3$

(3) مع $B = \{A, B, C\}$ لنبين أن B أساس لـ A

لدينا : $\text{card } B = \dim A$ يكفي أن يبين أن B أسرة حرة

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^2: aA + bB + cC = 0_2 \quad \text{أيضاً:}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a+b+2c & 2a-c & 4b+3c \\ 0 & -a+b+2c & 2a-c \\ 0 & 0 & -a+b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a+b+2c=0 \\ 2a-c=0 \\ 4b+3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=-\frac{3}{2}c \\ -\frac{5}{2}c+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

إذن \mathcal{B} أسرة حرة، وبالتالي \mathcal{B} أساس للفضاء المتجهي $(E; +, \cdot)$

16 نعتبر المجموعة $\mathcal{B} = \{1\}$ و E مجموعة الدوال العددية

المعرفة على \mathcal{B} بـ: $f(x) = \frac{P(x)}{x^2-1}$ حيث $P(x)$ دالة

حدودية درجتها أقل من أو يساوي 2.

(1) بين أن: $(E; +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

(2) نعتبر الدوال التالية:

$$g_1(x) = \frac{1}{x^2+x+1}, \quad g_2(x) = \frac{x}{x^2+x+1}, \quad g_3(x) = \frac{1}{x-1}$$

1- بين أن الأسرة $\mathcal{B} = \{g_1, g_2, g_3\}$ أساس للفضاء المتجهي E .

ب- حدد واحد اثنين الدالة $h: \mathbb{R} \rightarrow \frac{1}{x^2-1}$ بالنسبة للأساس \mathcal{B} .

الجواب: (1) لنثبت أن: $(E; +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

لدينا: $(f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))_{+; \cdot}$ فضاء متجهي حقيقي، حيث $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ مجموعة

الدوال المعرفة من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} .

لدينا: $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ، وإذا كان يكفي أن نثبت أن $(E; +)$ زمرة جزئية

لـ $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ والقانون: قانون تركيب خارجي في E

لدينا: $E \neq \emptyset$ لأن $0_E = 0 \in E$ الدالة الصفرية.

لكن g_1 و g_2 من E بحيث: $g_1(x) = \frac{P_1(x)}{x^2-1}$ و $g_2(x) = \frac{P_2(x)}{x^2-1}$

$P_1(x)$ و $P_2(x)$ حدوديتين بحيث: $d^0 P_1 \leq 2$ و $d^0 P_2 \leq 2$

$$g_1(x) - g_2(x) = \frac{P_1(x) - P_2(x)}{x^2-1} = \frac{P_3(x)}{x^2-1} \quad \text{لأن:}$$

حيث: $P_3(x) = P_1(x) - P_2(x)$ و $d^0 P_3 \leq \max(d^0 P_1, d^0 P_2) \leq 2$

ومنه $g_1 - g_2 \in E$ لأن: $(E; +)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +)$

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}) (\forall f \in E) : \lambda f(x) = \lambda \cdot \frac{P(x)}{x^3-1} = \frac{Q(x)}{x^3-1} \quad \text{لدينا،}$$

$$d^0 Q = d^0 P \leq 2 \quad ; \quad Q(x) = \lambda P(x) \quad \text{حيث}$$

إذن: $\lambda \cdot f \in E$ ومنه القانون . قانون تركيب خارجي في E وبالتالي $(E; +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

(2) - لنبين أن: $\mathcal{B} = \{g_1, g_2, g_3\}$ أساس في E .

$$\text{لدينا،} \quad f \in E \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^3-1}, \quad \forall x \in D$$

لنكتب d, p, γ من \mathbb{R} بحيث:

$$\begin{aligned} f(x) &= d g_1(x) + p g_2(x) + \gamma g_3(x) \\ &= \frac{d}{x-1} + \frac{px}{x^2+x+1} + \frac{\gamma}{x^2+x+1} = \frac{(d+p)x^2 + (d-p+\gamma)x + (d-\gamma)}{x^3-1} \\ &= \frac{ax^2 + bx + c}{x^3-1} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{cases} a = d+p \\ b = d-p+\gamma \\ c = d-\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{a+b+c}{3} \\ p = \frac{2a-b-c}{3} \\ \gamma = \frac{a+b-2c}{3} \end{cases}$$

$$(\forall f \in E) (\exists (d, p, \gamma) \in \mathbb{R}^3) \quad f = d g_1 + p g_2 + \gamma g_3 \quad \text{إذن:}$$

ومنه: $\{g_1, g_2, g_3\}$ أسرة نو لد الفضاء المتجهي $(E; +, \cdot)$.
 لنبين أن \mathcal{B} أسرة حرة .

$$\forall (d, p, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad \forall x \in D : d g_1(x) + p g_2(x) + \gamma g_3(x) = 0 \quad \text{لدينا،}$$

$$\frac{(d+p)x^2 + (d-p+\gamma)x + (d-\gamma)}{x^3-1} = 0$$

$$(d+p)x^2 + (d-p+\gamma)x + (d-\gamma) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d+p=0 \\ d-p+\gamma=0 \\ d-\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ p=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

ومنه: \mathcal{B} أسرة حرة وبالتالي فهي أساس للفضاء المتجهي E

(3) لنحدد إحداثيات الدالة $f: x \mapsto \frac{1}{x^3-1}$ بالنسبة للأساس \mathcal{B}

حسب السؤال (2) -1، لدينا: $a=b=0$ و $c=1$

إذن: $(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ هي إحداثيات الدالة f بالنسبة للأساس \mathcal{B}

النظم الخطية

1 حل باستعمال طريقة كوفن النظام التالية :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (S): \begin{cases} 3x - 2y + z = 14 \\ x + 3y + z = 2 \\ -2x + 5y + 2z = 2 \end{cases}$$

الجواب : لدينا : $(S): \begin{cases} 3x - 2y + z = 14 & (L_1) \\ x + 3y + z = 2 & (L_2) \\ -2x + 5y + 2z = 2 & (L_3) \end{cases}$

بإجراء العملية التالية على السطور (L_1) للنظمة (S) : $(L_1) \rightarrow (L_2)$

$$\text{نحصل على : } \begin{cases} x + 3y + z = 2 & (L_2) \\ 3x - 2y + z = 14 & (L_1) \\ -2x + 5y + 2z = 2 & (L_3) \end{cases}$$

بإجراء العمليات التالية على سطور النظمة (S)

$$(L'_3) \rightarrow (L_3) + 2(L_2) \quad \text{و} \quad (L'_2) \rightarrow (3L_2) - (L_1)$$

نحصل على النظمة (S') تكونها النظمة (S) .

$$(S') : \begin{cases} x + 3y + z = 2 & (L'_1) \\ 11y + 2z = 8 & (L'_2) \\ 11y + 4z = 6 & (L'_3) \end{cases}$$

$$(L'_3) - (L'_2) \Rightarrow 2z = -14 \Leftrightarrow z = -7$$

$$\text{ومنه : } x = 1, \quad y = -2, \quad z = -7$$

وبالتالي مجموعة حلول النظمة (S) هي : $S = \{(1, -2, -7)\}$

2 \mathbb{R}^3 مزود بالأساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المتجهات :

$$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{w} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

(1) بين أن الأسرة $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ غير مقيدة .

(2) استنتج أن الأسرة $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ أساس لـ \mathbb{R}^3 .

الجواب :

(1) نفترض أن الأسرة \mathcal{B} مقيدة إذا: $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2: \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$
ومنه نحصل على النظام التالية:

$$(S): \begin{cases} x + y = -1 \\ x + 2y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ y = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

وإذاً غير ممكن ومنه \mathcal{B} أسرة غير مقيدة.

(2) بما أن \mathcal{B} غير مقيدة فإنها حرة و $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \text{card } \mathcal{B}$
وبالتالي \mathcal{B} أساس للفضاء المتجهي \mathbb{R}^3 .

3 حل في \mathbb{R}^4 باستعمل طريقة كوسم النظام الخطية التالية:

$$(S): \begin{cases} 10x + 7y + 8z + 7t = 32 \\ 7x + 5y + 6z + 5t = 23 \\ 8x + 6y + 10z + 9t = 33 \\ 7x + 5y + 9z + 10t = 31 \end{cases}$$

الجواب: لدينا: $(L_1): 10x + 7y + 8z + 7t = 32$
 $(L_2): 7x + 5y + 6z + 5t = 23$
 $(L_3): 8x + 6y + 10z + 9t = 33$
 $(L_4): 7x + 5y + 9z + 10t = 31$

نطبق العمليات التالية على سطور النظام (S):

$$(L'_2) \rightarrow (L_2) - \frac{7}{10}(L_1) \quad (L'_3) \rightarrow (L_3) - \frac{8}{10}(L_1) \quad (L'_4) \rightarrow (L_4) - \frac{7}{10}(L_1)$$

النظام (S) تكافئ النظام (S') : إذن:

$$(S'): \begin{cases} 10x + 7y + 8z + 7t = 32 & (L'_1) \\ \frac{1}{10}y + \frac{4}{10}z + \frac{1}{10}t = \frac{6}{10} & (L'_2) \\ \frac{4}{10}y + \frac{36}{10}z + \frac{34}{10}t = \frac{74}{10} & (L'_3) \\ \frac{1}{10}y + \frac{34}{10}z + \frac{53}{10}t = \frac{86}{10} & (L'_4) \end{cases}$$

تطبيق العمليات التالية على صفوف النظام (S):

$$(L_3) \rightarrow (L_3) - \frac{4}{10}(L_2) \quad ; \quad (L_4) \rightarrow (L_4) - (L_2)$$

النظام (S') تكافئ النظام (S).

$$(S') : \begin{cases} 10x + 7y + 8z + 7t = 32 & (L_1) \\ \frac{1}{10}y + \frac{36}{10}z + \frac{34}{10}t = \frac{6}{10} & (L_2) \\ 2z + 3t = 5 & (L_3) \\ 3z + 5t = 8 & (L_4) \end{cases}$$

تطبيق العملية التالية :
النظام (S'') تكافئ (S').

$$(S'') : \begin{cases} 10x + 7y + 8z + 7t = 32 \\ \frac{1}{10}y + \frac{36}{10}z + \frac{34}{10}t = \frac{6}{10} \\ 2z + 3t = 5 \\ \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \quad ; \quad z = 1 \quad ; \quad y = 1 \quad ; \quad x = 1$$

وبالتالي مجموعة حلول النظام (S) هي : $S = \{(1; 1; 1; 1)\}$

4 حل في النظام الخطية التالية :

$$(S) : \begin{cases} x - y - z + t = a \\ x - y + z - t = b \\ x + y - z - t = c \\ x + y + z + t = d \end{cases}$$

حيث : a, b, c, d أعداد حقيقية معلومة.

$$(S) : \begin{cases} x - y - z + t = a & (L_1) \\ x - y + z - t = b & (L_2) \\ x + y - z - t = c & (L_3) \\ x + y + z + t = d & (L_4) \end{cases}$$

الجواب : لدينا :

$$(L_1) + (L_2) + (L_3) + (L_4) \Rightarrow 4x = a + b + c + d \quad \text{لدينا :}$$

$$x = \frac{1}{4}(a + b + c + d) \quad \text{ومن ثم :}$$

$$(L_1) + (L_2) \Rightarrow 2x - 2y = a + b$$

$$\Leftrightarrow 2y = 2x - (a+b) = \frac{-a-b+c+d}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-a-b+c+d}{4}$$

$$(L_2) + (L_3) \Rightarrow 2x - 2z = b + c$$

$$\Leftrightarrow 2z = 2x - (b+c) = \frac{-b-c+a+d}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b-c+a+d}{4}$$

$$(L_3) + (L_4) \Rightarrow 2x + 2z = a + d$$

$$\Leftrightarrow 2z = -2x + (a+d)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b-c+a+d}{4}$$

$$z = \frac{-a-c+b+d}{4}$$

إذن :

وبالتالي مجموعة حلول النظام (S) هي :

$$S = \left\{ \left(\frac{a+b+c+d}{4}, \frac{-a-b+c+d}{4}, \frac{-a-c+b+d}{4}, \frac{-b-c+a+d}{4} \right) \right\}$$

5 حل ونناقش حسب قيم المعاملات الحقيقية = النظام الخطية :

$$(S) \begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \end{cases}$$

الجواب : لدينا :

$$(S) : \begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = mx + y - 1 \\ (m-1)(x-y) = 0 \\ (m^2-1)x + (m+1)y = m+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y \\ z=mx+y-1 \\ m(m+1)x = m+1 \end{cases} \quad \text{المعادلة 1 : إذا كان } m \neq -1 \quad \text{فإن :}$$

ومنه نستنتج حالتان ثانوية :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{m} \\ y = \frac{1}{m} \\ z = \frac{1}{m} \end{cases}$$

* إذا كان : $m \in \{0, -1\}$ فإن :

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \frac{1}{m} \right) \right\} \quad \text{ومنه :}$$

$$\begin{cases} z = y - 1 \\ x = y \\ 0 \cdot x = 1 \end{cases}$$

$m=0$: إذا كان: فإن النظم (S) تصبح:

$$S = \emptyset$$

وهذا غير ممكن ومنه: $m=-1$: إذا كان: فإن النظم (S) تصبح:

$$\begin{cases} x = y \\ z = -1 \end{cases}$$

$$S = \{(x; x; -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

ومنه:

العلية 2: إذا كان: $m=1$ فإن النظم (S) تصبح:

$$\begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} z = x + y - 1 \\ 2y = 2 \end{cases}$$

$$S = \{(x; 1; x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

ومنه:

6 حدد جميع الدوال العددية f التي درجتها أصغر من أو تساوي

3 وتحقق: $f(1) = -4$ و $f(-1) = 4$ و $f(2) = 1$ و $f(-2) = 0$

الجواب: نضع: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

الشروط المطلوبة كتابة النظم الخطية التالية:

$$(S): \begin{cases} a + b + c + d = -4 & (L_1) \\ -a + b - c + d = 4 & (L_2) \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 & (L_3) \\ 3a - 2b + c = 0 & (L_4) \end{cases}$$

بإجراء العمليات التالية على سطور النظم (S)

$$(L_1') \rightarrow (L_3) - (L_1) \quad \text{و} \quad (L_2') \rightarrow -\frac{1}{2}((L_2) - (L_1))$$

نظم (S) تكافئ النظم (S')

$$(S'): \begin{cases} a + b + c + d = -4 & (L_1') \\ a + c = -4 & (L_2') \\ 7a + 3b + c = 5 & (L_3') \\ 3a - 2b + c = 0 & (L_4') \end{cases}$$

بإجراء العمليات التالية على سطور النظم (S')

$$(L_4') \mapsto \frac{2}{3} (L_4) - (L_2) \quad ; \quad (L_3') \mapsto \frac{1}{3} ((L_3) - (L_2))$$

النظمية (S) تكافئية النظمية (S')

$$(S'') : \begin{cases} a+b+c+d = -4 \\ a+c = -4 \\ 2a+b = 3 \\ a-b = 2 \end{cases}$$

بإجراء العمليات التالية على سطور النظمية (S')

$$(L_4'') \mapsto (L_4') + (L_3')$$

النظمية (S'') تكافئية النظمية (S''').

$$(S''') : \begin{cases} a+b+c+d = -4 \\ a+c = -4 \\ 2a+b = 3 \\ 3a = 5 \end{cases}$$

ومنه : $a = \frac{5}{3}$; $b = -\frac{4}{3}$; $c = -\frac{17}{3}$; $d = \frac{1}{3}$.
وبالتالي المسألة تقبل حلاً وحيداً هي الحدودية في المعرف بمايلي :

$$f(x) = \frac{5}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

7 نضع : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) بين أن : $j^3 = 1$ و $1 + j + j^2 = 0$

(2) تعتبر النظمية (S) المعروفة بمايلي :

$$(S) : \begin{cases} x+y+z = a \\ x+jy+j^2z = b \\ x+j^2y+jz = c \end{cases}$$

حيث : a, b, c أعداد حقيقية .

1- حل في \mathbb{C}^3 النظمية (S).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

ب- استنتج مقلوب المصفوفة

الجواب : (1) لدينا : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$

ومنه : $j^3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

$$1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \quad \text{ولذا}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}$$

$$1 + j + j^2 = 0 \quad \text{وهو}$$

(2) لنحل النظام (S).

$$(S): \begin{cases} x + y + z = a & (L_1) \\ x + jy + j^2z = b & (L_2) \\ x + j^2y + jz = c & (L_3) \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$(L_1) + (L_2) + (L_3) \Rightarrow 3x + (1+j+j^2)y + (1+j+j^2)z = a+b+c$$

$$\Leftrightarrow 3x = a+b+c$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(a+b+c)$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a & (L'_1) \\ j^2x + y + jz = j^2b & (L'_2) \\ jx + y + j^2z = jc & (L'_3) \end{cases} \quad \text{ولدينا:}$$

$$(L'_1) + (L'_2) + (L'_3) \Rightarrow (1+j+j^2)x + 3y + (1+j+j^2)z = a + j^2b + jc$$

$$\Leftrightarrow 3y = a + j^2b + jc$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(a + j^2b + jc)$$

$$\text{وهو: } z = \frac{1}{3}(a + jb + j^2c); \quad y = \frac{1}{3}(a + j^2b + jc); \quad x = \frac{1}{3}(a + b + c)$$

وبعد التحقق في النظام (S) من هذه الحلول. فإن مجموعها حلول

$$S = \left\{ \left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+j^2b+jc}{3}, \frac{a+jb+j^2c}{3} \right) \right\} \quad \text{النظام (S) هو:}$$

ب- لنحدد مقلوب المصفوفة $M^{-1} : M$

لتحديد M^{-1} يكفي تحديد حلول النظام (S).

$$(S): \begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2z = b \\ x + j^2y + jz = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

وسأكتب حلول النظام (S) يكتب على شكل

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \\ y = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}jb + \frac{1}{3}jc \\ z = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}jb + \frac{1}{3}j^2c \end{cases}$$

: ۴۵۰

8

$$\det M(A) = -(A-2)^2(A+2) \quad ; \text{ صفت } A$$

(3) نعتبر النظم "الخطية" التالية:

$$(5): \begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + 2y + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$

جيت . a , b , c أعداد حقيقيه , d بار ائير حقيقي

ولكن S مجموعة حلول النقطة (5).

1- حدود و اذا كان $d=1$

ب۔ حدود کے لاکھان ۱ ۲۸-۱۰

(4) نفترض أن $a \in \{1, -1\}$

5-220

ب. استخراج $M^{-1}(d)$.

الجواب : 1) لدينا : $\det M(a) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ a & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & a \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - (4 - 2a) + (2 - 2a) = 0$

$$= (d-1) - (1-d) + d(1-d^2) = -d^3 + 3d - 2$$

$$= -(x-2)^2(x+2)$$

(2) $M(\alpha)$ يعكس مقلوب $M_2(\mathbb{R}) \iff \det M(\alpha) \neq 0$

$$\alpha \neq 1 \quad \text{g} \quad \alpha \neq -2 \quad \Leftrightarrow$$

(3) 1- إذا كان $a=1$ فإن النظم (S) تكافئ:

$$x+y+z = a = b = c$$

وإذا كان: $a \neq b$ أو $a \neq c$ أو $b \neq c$

فإن: $S = \emptyset$

2- إذا كان $a=b=c$ فإن: $S = \{(x; y; a-x-y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

3- إذا كان $a=-2$ فإن النظم (S) تكافئ:

$$(S): \begin{cases} x+y-2z = a & (L_1) \\ x-2y+z = b & (L_2) \\ -2x+y+z = c & (L_3) \end{cases}$$

$$(L_1) + (L_2) + (L_3) \Rightarrow 0 = a+b+c \quad \text{لدينا}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z = a \\ x-2y+z = b \\ -2x+y+z = -a-b \end{cases} \quad \text{إذاً}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2a+b)+z \\ y = \frac{1}{3}(a-b)+z \\ -2x+y+z = -a-b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2a+b)+z \\ y = \frac{1}{3}(a-b)+z \\ -\frac{2}{3}(2a+b)-2z + \frac{1}{3}(a-b)+z + z = a-b \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{3}(2a+b)+z; \frac{1}{3}(a-b)+z; z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{ومنه:}$$

(4) نفترض أن $a \in \{1, -2\}$

1- لنحدد S.

$$(S): \begin{cases} x+y+az = a & (L_1) \\ x+ay+z = b & (L_2) \\ ax+y+z = c & (L_3) \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$(L_1) + (L_2) + (L_3) \Rightarrow (a+2)(x+y+z) = a+b+c$$

$$\Leftrightarrow x+y+z = \frac{a+b+c}{a+2}$$

$$(L_1) \Leftrightarrow x + y + dz = a$$

$$\Leftrightarrow x + y + z + dz = a + z$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{d+2} (a+b+c) + dz = a+z$$

$$\Leftrightarrow (d-1)z = a - \frac{1}{d+2} (a+b+c) = \frac{1}{d+2} ((d+2)a - b - c)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{(d+2)(d-1)} ((d+2)a - b - c)$$

$$(L_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2+d} (a+b+c) + y(d-1) = b$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{(d-1)(2+d)} (-a + (d+2)b - c)$$

$$(L_3) \Leftrightarrow \frac{1}{2+d} (a+b+c) + x(d-2) = c$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{(d-2)(2+d)} (-a - b + (2+d)c)$$

$$S = \left\{ \left(\frac{-a - b + (d+2)c}{(d-2)(d+2)}, \frac{-a + (d+2)b - c}{(d-1)(d+2)}, \frac{(d+2)a - b - c}{(d-1)(d+2)} \right) \right\}$$

بما أن حلول النظام (3) تكون على شكل:

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{(d-2)(d+2)}a + \frac{-1}{(d-2)(d+2)}b + \frac{d+2}{(d-2)(d+2)}c \\ y = \frac{-1}{(d-1)(d+2)}a + \frac{d+2}{(d-1)(d+2)}b + \frac{-1}{(d-1)(d+2)}c \\ z = \frac{d+2}{(d-1)(d+2)}a + \frac{-1}{(d-2)(d+2)}b + \frac{-1}{(d-1)(d+2)}c \end{cases}$$

$$M(d) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(d-2)(d+2)} & \frac{-1}{(d-2)(d+2)} & \frac{d+2}{(d-2)(d+2)} \\ \frac{-1}{(d-1)(d+2)} & \frac{d+2}{(d-1)(d+2)} & \frac{-1}{(d-1)(d+2)} \\ \frac{d+2}{(d-1)(d+2)} & \frac{-1}{(d-2)(d+2)} & \frac{-1}{(d-1)(d+2)} \end{pmatrix}$$

$$(S) \begin{cases} mx + y + z = 3 \\ x + my = 1 \\ x + y + m = 1 \end{cases}$$

ليكن S مجموعة حلول (S) في \mathbb{R}^3

(1) عدد m لكي يكون $S = \emptyset$

(2) عدد m لكي يكون $S = \mathbb{R}^3$

(3) عدد m لكي يكون $S \neq \emptyset$

الجواب: (1) ليكن $(x, y, z) \in S$ من \mathbb{R}^3 لدينا:

$$(x, y, z) \in S \Rightarrow (m+2)x + (m+2)y + (m+2)z = 3$$

$$\Leftrightarrow (m+2)(x+y+z) = 3$$

$$x+y+z = \frac{3}{m+2} \quad \text{لأن } m+2 \neq 0 \text{ فإن:}$$

$$mx + y + z = 1 \Leftrightarrow mx - x + \frac{3}{m+2} = 1 \quad \text{لدينا،}$$

$$\Leftrightarrow (m-1)x = 1 - \frac{3}{m+2} = \frac{m-1}{m+2}$$

$$x = \frac{1}{m+2} \quad \text{لأن } m \neq 1 \text{ فإن:}$$

$$z = \frac{2}{m+2} \quad \text{بالمثل نحصل على:} \quad y = \frac{1}{m+2}$$

$$S = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad m \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$$

(2) حسب ماسف.

$$0(x+y+z) = 3 \quad \text{لأن } m = -2 \text{ فإن:}$$

أي: $0 = 3$ وهذا غير ممكن.

$$S = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad m = -2$$

$$x+y+z = 1 \quad \text{(3) إذا كان } m = 1 \text{ فإن الدالة (S) تكافئ:}$$

$$z = 1 - x - y \quad \text{تكافئ:}$$

$$S = \{(x, y, 1-x-y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$S \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad m = 1 \quad \text{وبالتالي:}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(S) \begin{cases} x^2 - yz = a \\ y^2 - zx = -1 \\ z^2 - xy = 3 \end{cases} \quad (2) \text{ ديسر النظم } (S) \text{ المصفوفة معكافية}$$

$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} \quad \text{نضع:}$$

$$1- \text{ من أن } (x, y, z) \Rightarrow A \cdot M(x, y, z) = (5x - y + 3z)I \quad (S)$$

$$I = M(x, 0, 0) \quad \text{جئت:}$$

$$\text{نستخرج أن: } 3k \in \mathbb{R} \cdot x = 2k; y = -k; z = k$$

الاجواب: 1) لنكتب $\vec{x} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ و $\vec{x}' \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ متجهتين من \mathbb{R}^3 .

$$\vec{x}' = A \cdot \vec{x} \iff \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{x}' \quad \text{لدينا:}$$

$$\vec{x}' = A \cdot \vec{x} \iff \begin{cases} 5x + 3y - z = a & (L_1) \\ -x + 5y + 3z = b & (L_2) \\ 3x - y + 5z = c & (L_3) \end{cases} \quad (S)$$

$$(L_2) \mapsto \frac{1}{14}((3L_1) + (L_3)) \quad ; \quad (L_3) \mapsto \frac{1}{14}((5L_1) + (L_2))$$

النقطة (5) معكافية للنقطة (2)

$$(S') : \begin{cases} 5x + 3y - z = a & (L'_1) \\ x + y = \frac{1}{14}(3a + b) & (L'_2) \\ 2x + y = \frac{1}{14}(5a + c) & (L'_3) \end{cases}$$

$$(L'_3) - (L'_2) \implies x = \frac{1}{14}(2a + c - b)$$

$$z = \frac{1}{14}(-a + b + 2c) \quad ; \quad y = \frac{1}{14}(a + 2b - c) \quad \text{وهنا،}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{14}a - \frac{1}{14}b + \frac{1}{14}c \\ y = \frac{1}{14}a + \frac{2}{14}b - \frac{1}{14}c \\ z = \frac{1}{14}a + \frac{1}{14}b + \frac{2}{14}c \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{14} & \frac{-1}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{2}{14} & \frac{-1}{14} \\ \frac{-3}{14} & \frac{1}{14} & \frac{8}{14} \end{pmatrix} \quad \text{ومنه،}$$

(2) - يمكن \$(x, y, z)\$ من \$S\$:

$$A \cdot M(x, y, z) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5x+3z-y & 5y+3x-z & 5z+3y-x \\ -x+5z+3y & -y+5x+3z & -z+5y+3x \\ 3x-z+5y & 3y-x+5z & 3z-y+5x \end{pmatrix}$$

فإن،

$$(S): \begin{cases} x^2 - yz = 5 \\ y^2 - zx = 1 \\ z^2 - xy = 3 \end{cases}$$

$$-x+5z+3y = (y^2-zx)x + (x^2-yz)z + (z^2-xy)y = 0$$

$$3x-z+5y = (z^2-xy)x + (y^2-zx)z + (x^2-yz)y = 0$$

ومنه،

$$A \cdot M(x, y, z) = \begin{pmatrix} 5x+3z-y & 0 & 0 \\ 0 & -y+5x+3z & 0 \\ 0 & 0 & 3z-y+5x \end{pmatrix}$$

وبالتالي،

$$A \cdot M(x, y, z) = (5x+3z-y)I$$

ب- حسب ما سبق لدينا،

$$(S) \text{ حل للأنظمة } (x, y, z) \Rightarrow \begin{cases} -x+3y+5z=0 \\ 3x+5y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+3y+5z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=-z \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3k \in \mathbb{R} : x=2k ; y=-k ; z=k$$

وبالتالي،

$$(x, y, z) \in S \Rightarrow 3k \in \mathbb{R} : x=2k ; y=-k ; z=k$$

تمارين للبحث

1 ليكن k من R نريد R بقانون تركيب داخلي * معرفة بمبايلي:

$$\forall (x, y) \in R^2, \quad x * y = x + y + kxy$$

(1) ماذا يمكنك أن تقول على القانون * إذا كان $k = 0$ ؟

(2) نفترض أن $k \neq 0$.

أ- هل للقانون * عنصرًا محايدًا ؟

ب- حدد المجموعة G للعناصر القابلة للمماثلية بالقانون *

2 نريد R بقانون تركيب داخلي T بفرض أن القانون T يكون

معروف بالنسبة لكل x و y من R بحيث $xy \neq 1$

$$(xTy) - xy(xTy) = (x+y)$$

(1) بين أن القانون T تجميعي .

(2) بين أن القانون T تبادلي .

(3) هل القانون T يعمل عنصرًا محايدًا ؟

(4) هل كل عنصر يقبل معًا بل بالنسبة للقانون T ؟

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x^2 - 2y^2 = 1\}$$

والمطابق T من $E \times E$ نحو $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعروف بمبايلي .

$$\forall (x, y) \in E, \forall (x', y') \in E, (x, y)T(x', y') = (xx' + 2yy', xy' + x'y)$$

(1) بين أن T قانون تركيب داخلي معروف على E

(2) هل القانون T يعمل عنصرًا محايدًا ؟

4 ليكن k من R و m من R نريد R بقانون التركيب داخلي *

$$\forall (x, y) \in R^2, \quad x * y = m(x + y) + kxy$$

(1) ماهي الشروط التي يجب أن نحققها m و k لكي يكون لدينا تماثل تقابلي

من $(R, +)$ نحو $(R, *)$ ؟

(2) ماهي الشروط التي يجب أن نحققها m و k لكي يكون لدينا تماثل تقابلي

من (R, \times) نحو $(R, *)$ ؟

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: xTy = xy - x - y + 2$$

- (1) حدد عنصر المعايير للقانون T .
- (2) حدد عناصر R القابلة للمماثلة في (\mathbb{R}, T) .
- (3) هل أن المجال \mathbb{R} هو مجموعة مغلقة تحت القانون T ؟
- (4) هل أن كل عنصر x له معاكس x^{-1} ؟ هل المعاكس 3^{-1} هو 2 ؟

لكن E مجموعة موروثة لقانون بركست داخل E و $a \in E$
نفترض أن القانون $*$ تجميعي.

$$f_a: E \rightarrow E \quad g_a: E \rightarrow E$$

$$x \mapsto a * x \quad x \mapsto x * a$$

- (1) نفترض أن القانون $*$ تبادلي.
- أ- هل أنه إذا كان f_a معاكس فإنه يوجد عنصر معاكس a^{-1} في $(E, *)$ ومماثل a^{-1} لـ a .
- ب- نفترض أن f_a منسوبة.
- هل يوجد عنصر عنصر معاكس لـ $(E, *)$ ؟ هل يوجد مماثل a^{-1} لـ a ؟
- (2) نفترض أن القانون $*$ غير تبادلي.
- هل أنه إذا كان التجميعان f_a و g_a منسوبة لابد فإنه يوجد عنصر معاكس لـ $(E, *)$ ومماثل a^{-1} لـ a .

7 عنصر المجموعة $E = \{1, 2, 3, 4\}$ موروثة لقانون التركيب الداخلي T المعرفة بماتريسي:

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad xTy = \begin{cases} \text{هو باقي القسمة إذا قلنا } x \text{ على } y \\ 5 \text{ على } x \end{cases}$$

- (1) حدد جدول القانون T .
 - (2) هل القانون T يقبل عنصر معاكس؟
 - (3) هل القانون T تجميعي؟ تبادلي؟
 - (4) هل كل عنصر x من E له معاكس؟
 - (5) حل في R المعادلات التالية:
- أ- $1Tx = 1$ ب- $xTx = 3$ ج- $3Tx = 1$

8. مع المجموعة E معرفة من E نحو E تباليبي . $\forall x \in E \quad f(x) = 1 \cdot x$

أ- هل التطبيق f تباليبي ؟

ب- هل التطبيق f شمولي ؟

(3) مثل : $\forall (x, y) \in E^2 : \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ أو $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

8. مع المجموعة $F = \{0, 1, 2\}$ معرفة على F قانون التركيب الداخلي * بالجدول التالي :

\nearrow *	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

أ- هل القانون * تباليبي ؟

ب- هل القانون * شمولي ؟

المعروف : $f_a(x) = a * (x * x) : (a \in F)$

نعرف القانون T تباليبي :

$\forall (a, b) \in F^2 : \quad f_a \circ f_b = f_{a * b}$

أ- هل T قانون تركيب داخلي في F ؟

ب- هل T تباليبي ؟

ج- معبر التطبيق φ من F نحو F معرف بـ $\varphi(a) = f_a$

قارن : $\varphi(a * b)$ و $\varphi(a) \circ \varphi(b)$ لكل a, b من F .

9. لتكن $(E, *)$ مجموعة مبرودة بقانون التركيب الداخلي *

تجميعي ويكن e عنصراً من E .

(R₁) : $\begin{cases} \forall x \in E : x * e = x \\ \forall x \in E \exists x' \in E : x * x' = e \end{cases}$ نعتبر العلاقات التالية :

(R₂) : $\forall (x, y, z) \in E^3 : (x * y) * z = (y * z) * x$

(R₃) : $\forall (x, y) \in E^2 : x^2 * y = y = y * x^2$

(1) بس أ ب : $\{ (R_2) \Rightarrow (R_1) \}$ دمرة $(E, *)$

(2) بس أ ب : $\{ (R_2) \Rightarrow (R_3) \}$ زمرة تباليبية $(E, *)$

(3) بس أ ب : $\{ (R_3) \Rightarrow (R_2) \}$ زمرة تباليبية $(E, *)$

10. لتكن G زمرة و H و K زميرتين جزئيتين لـ G .

بين أن : $H \cup K \Leftrightarrow H \cap K$ أو $K \subset H$ زمرة جزئية لـ G

11 لتكن (G, \cdot) زمرة و e عنصرا المعاييد وليكن n من \mathbb{N}^* x
 و a و b من G . بين الاستنتاجات التالية:

(1) $(a^5 = b^4 = e \text{ و } ab = ba^3) \Rightarrow (a^2b = ba^2 \text{ و } a^3b^3 = ba^3a^2)$

(2) $(a^5 = e \text{ و } ab a^{-1} = b^2) \Rightarrow (b^3 = e)$

(3) $(ab)^n = e \Rightarrow ((ba)^n = e)$

(4) $(x^3 = y^2 \text{ و } y^3 = z^2 \text{ و } z = x^2) \Leftrightarrow (x = e \text{ و } y = x^8 \text{ و } z = x^3)$

12 لتكن $(G, *)$ زمرة و H و K زمريتين جزئيتين لـ G . x

نضع: $H * K = \{x * y \mid x \in H \text{ و } y \in K\}$

(1) بين التكايفات التالية:

$K * H$ زمرة جزئية لـ $G \Leftrightarrow H * K$ زمرة جزئية لـ G

$\Leftrightarrow H * K \subset K * H$

$\Leftrightarrow K * H \subset H * K$

(2) نفرض أن L زمرة جزئية لـ G و $H * K = K * H$ و $H \subset L$

بـ L : $(H * K) \cap L = H * (K \cap L) = (K \cap L) * H$

13 لتكن $(G, *)$ مجموعة مبرودة. قانون التركيب الداخلي * x

بـ $\forall x \in E \quad x * x = e$

حيث e هو العنصر المعاييد للقانون *

بين أن القانون * تبادلي.

لتكن (G, T) و (G, τ) زمريتين جزئيتين لـ G و G'

(1) لتكن H زمرة جزئية من G . x

بين أن $\tau(H)$ زمرة جزئية من G' .

(2) لتكن H' زمرة جزئية من G' .

بين أن $\tau^{-1}(H')$ زمرة جزئية من G .

14 لتكن (G, \cdot) زمرة منتهية و f مشاكل من (G, \cdot) نحو (G, \cdot) x

بـ $A = \{x \in G \mid f(x) = x^{-1}\}$ (معامل x)

بين أن: $\text{Card } A \geq \frac{1}{2} \text{Card } G$

15

نعتبر التشفيف f_a المعرف من \mathbb{R}^2 نحو \mathbb{R}^2 بمايلي :

$$a \in \mathbb{R}^* \quad f_a(x, y) = (ax, \frac{y}{a})$$

(1) بين أن f_a تشفير تقابلي .(2) نعتبر المجموعة $F = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}^*\}$. بين أن تركيب التشفيفات \circ قانون داخلي في F .(3) نعتبر التشفيف f_1 المعرف من \mathbb{R}^2 نحو \mathbb{R}^2 بمايلي : $f_1(a) = f_a$ أ- بين أن f_1 مشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, x) نحو (F, \circ) .ب- استنتج خاصيات القانون \circ في (F, \circ) .

16

نعتبر المجموعة $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$: نعرف في E القانون T المعرف بمايلي :

$$\forall (a, b) \in E \text{ و } \forall (a', b') \in E \quad (a, b) T (a', b') = (aa', ab' + b)$$

(1) بين أن T قانون تجميعي .ب- هل القانون T تبادلي ؟(2) بين أن T يقل عنصرًا معتدلاً وأن كل عنصر من E يقبل ممانكاً يتم تعديده(3) لنكن : $F = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}^*\}$ بين أن F جزء مستقر من (E, T) وأن (F, T) و (\mathbb{R}^*, x) متشاكلتان

تقابلياً .

(3) ليكن φ التشفيف المعرف من E نحو \mathbb{R}^* بمايلي :أ- بين أن φ متشاكل من (E, T) نحو (\mathbb{R}^*, x) ب- لنكن : $G = \varphi^{-1}(\mathbb{Z})$.بين أن (G, T) و (\mathbb{R}, x) متشاكلتان .(4) لنكن $(f(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \circ)$ مجموعة الدوال العددية مزودة بعملية تركيبالدوال و $A(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ مجموعة الدوال $f_{(a,b)}$ بحيث :

$$(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} . \quad \forall x \in \mathbb{R} : f_{(a,b)}(x) = ax + b$$

بين أن A جزء مستقر من $(f(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \circ)$

17 بفرض $h(x, y)$ التطبيق التآلفي في المستوى P نحو 3
 الذي يربط كل نقطة $M(x, y)$ في المعلم $(0, +\infty)$ بالنقطة $M'(x', y')$
 بحيث

$$\begin{cases} x' = x + \lambda + a \\ y' = y \end{cases} \quad (\lambda \text{ بارامتر حقيقي})$$

- (1) بيّن أن $h(x, y)$ تقابل .
 (2) حدد المركب $h(x, y) \circ h(y, z)$ واستنتج أن :

$$h(x, y) \circ h(y, z) = h(x, z)$$

 بـ . بين أن المجموعة \mathcal{H} للتطبيقات $h(x, y)$ مزود بقانون التركيب الداخلي \circ زمرة تبادلية متماثلة تعاليمية مع $(\mathbb{R}^2, +)$

18 لنكن (G, \cdot) زمرة . لكل جزء A من G نعرف المجموعة

$$C(A) = \{x \in G \mid \forall a \in A : xa = ax\}$$

- (1) بين أن $C(A)$ زمرة جزئية لـ G .
 (2) بين أن : $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(G))^2 : A \subset B \Rightarrow C(B) \subset C(A)$
 (3) بين أن : $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(G))^2 : \begin{cases} C(A \cup B) \subset C(A) \cap C(B) \\ C(A \cup B) \subset C(A) \cap C(B) \end{cases}$
 (4) بين أن : $\forall A \in \mathcal{P}(G) : A \subset C(C(A))$
 (5) بين أن : $\forall A \in \mathcal{P}(G) : C(A) \subset C(C(C(A)))$

19 نعتبر المجال $I =]-1, 1[$
 (1) أ- . بين أن : $\forall (x, y) \in I^2 : x + y \neq 0$
 بـ . ليكن $a \in I$ نعتبر الدالة :

$$T_a : x \mapsto \frac{a+x}{a-x}$$

 ادرس تغير T_a على I .
 جـ . لكل a من I ، صم
 استنتج مما سبق أن x قانون توكس داخلني في I .
 (2) أ- اعلّم حد ولا تعبيرات الدالة G المعروفة على \mathbb{R} تعاليمية :

$$G(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}$$

 بـ . بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : G(x) \leq x$
 جـ . بين أن G مشاكل تعاليمية مع $(\mathbb{R}, +)$ نحو $(I, *)$
 دـ . استنتج نتيجة $(I, *)$
 هـ . ليكن H التطبيق العكسي للتطبيق G .

لكل $a \in \mathbb{R}$ ، $f_a(x) = a \cdot x$ ، نثبت $f_a \circ f_b = f_{ab}$ و $f_a \circ f_b = f_{ba}$.
 $f_a \circ f_b = f_{ab}$

أ- بين أنه إذا كان $a \neq 0$ فإن f_a دالة تبادلية على I .

ب- بين أن : $f_{a+b}(x) = f_a(x) + f_b(x)$ ، $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ ، $\forall x \in I$

ج- ليكن $a \leq b$ و $x \in [0, 2\pi]$ ، بين أن : $H(x) \geq 0$ ، ثم استنتج أن : $P(a) \leq P(b)$

20 نعتبر في $M_3(\mathbb{R})$ المصفوفتين : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و المجموعة : $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 : M = aI + bA\}$

أ- بين أن : $A^2 = A + 2I$

ب- بين أن $(E, +, \cdot)$ حلقة واحدة .

ج- بين أن A قابل عكس في E و حدد A^{-1} .

د- ليكن N من \mathbb{R} : نضع : $N = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \sin t \\ \sin t & \cos t & \sin t \\ \sin t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

تأكد من أن $N \in E$ و حدد سرورياً كائناً ما كان N لكي يقبل

عكساً في E و حدد N^{-1}

21 نعتبر المصفوفة : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1) أحسب : A^2 ، A^3

(2) استنتج A^n لكل n من \mathbb{N}

(3) نتحقق من أن : $A^3 - 3A^2 + 3A = I$

(4) استنتج A^{-1}

21^{bis} نضع : $M = \{A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$

(1) مل $(M, +)$ زمرة ؟ مل (M, \cdot) زمرة ؟

(2) أحسب A^n بدلالة n

ع- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{2n+1} (A + A^2 + \dots + A^{2n+1}) \in M$

22 نعتبر التطبيق $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\bar{x} \mapsto \overline{a \cdot x}$ ، $(a,n) \in [1,n-1] \times \mathbb{N}^*$

(1) بين أن ψ تماثل من $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ نحو $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

(2) بين أن ψ قابل عكس إذا وفقط إذا كان : $a \wedge n = 1$

22 تكون $(A, +, \cdot)$ حلقة واحدة و 1_A هو العنصر المحايد للعنصر 0 الداخلي .

نضع $U = \{a \in A \mid \exists b \in A, ab = ba = 1_A\}$.
 (1) بين أن كل x و y من A : $1_A - xy \in U \Leftrightarrow 1_A - yx \in U$

(2) بحسب العلاقة $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
 نضع $z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $1_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

أ- أجب : $\det(1_A - xzy)$ و $\det(1_A - xyx)$

ب- ماذا نستنتج ؟

23 نعتبر التطبيق F المعرف بما يلي

$$F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z = x + iy \mapsto e^x (\cos y + i \sin y)$$

مع $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(1) أجب x و y بدلالة $|F(z)|$ و $\arg(z)$

(2) استنتج أن F شمولي من \mathbb{C} نحو \mathbb{C}^*

(3) هل F لحيف بياني ؟

(4) ليكن z و z' من \mathbb{C} بين أن : $F(z+z') = F(z) \times F(z')$

(5) بين أن F تشاكل من $(\mathbb{C}, +)$ نحو (\mathbb{C}^*, \times)

(6) بين أن لكل x من \mathbb{R} : $F(x) \in \mathbb{R}^{*+}$

(7) نضع : $I = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x \in \mathbb{R}^*\}$ و $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

أ- بين أن لكل z من I : $F(z) \in I$

ب- استنتج أن F تشاكل من $(I, +)$ نحو (U, \times)

24 نعتبر المجموعة : $A = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$

(1) بين أن $(A, +, \cdot)$ حلقة تبادلية وواحدة .

(2) هل هي كاملة ؟

(3) نعتبر التطبيق : $\varphi: A \rightarrow \mathbb{Z}$
 $z = a + ib \mapsto \varphi(z) = \sqrt{a^2 + b^2}$

أ- بين أن φ تشاكل من (A, \cdot) نحو (\mathbb{Z}, \cdot)

ب- لنك z من E . من أن z تفعل معاني بالنسبة $x \Leftrightarrow \varphi(z)=1$

(4) برمز ب U مجموعة عناصر A التي تفعل معاني في A

أ- حدد بيا دراك عناصر U .

ب- حدد بنية (U, x) .

25 لنك v, p حلل المعادلة $x^2 - 2x - 2 = 0$

بصر المجموعة : $A = \{x + y\alpha \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$

(1) من أن $(A, +, \cdot)$ حلقة واحدة تبادلية

(2) لنك a, a', b, b' من \mathbb{Z} .

أ- بين أن $a + b\alpha = 0 \Rightarrow a = b = 0$

ب- من أن $a + b\alpha = a' + b'\alpha \Rightarrow a = a'; b = b'$

ج- بين أن $a + b\alpha \in A$

د- بين أن $(a + b\alpha)(a + b\beta) \in A$

(3) ليكن f تماكلاً من $(A, +, x)$ نحو $(A, +, x)$ حسب

$$(4) \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad f(m) = m$$

أ- بين أن f حل للمعادلة $x^2 - 2x - 2 = 0$

ب- حدد جميع التماكلات من $(A, +, x)$ نحو $(A, +, x)$ التي تصف (x)

26 لنك $(A, +, x)$ حلقة عنصرها المعاكس 0_A بالنسبة للمجموع .

(1) نعرف من A القانون الداخلي $x \cdot y = x + y - xy$. $\forall (x, y) \in A^2$

بين أن τ زمعي وله عنصر محايد وأن τ ليس توريماً بالنسبة لـ $+$

في حالة : $A - \{0_A\} \neq \emptyset$.

(2) نعرض في هذا السؤال أن $x_0 \tau y \neq 0_A \quad (\forall y \in A) \quad (\exists x_0 \in A)$

أ- بين أن : $x_0 \neq 0_A$

ب- بين أن : $(\forall y \in A) \quad x_0 \tau y = x_0$

(يمكنك تركيب $x_0 \tau y$ مع عنصر a من A) واستنتج أن x_0 عنصر محايد على اليسار بالنسبة للقانون x .

ج- من أن : $(\forall y \in A) \quad y \tau x_0 = x_0$ (استعمل البرهان باللف بوضع

$z \tau x_0 = z$) استنتج أن x_0 هو العنصر المحايد بالنسبة لـ x في A

د- ليكن x من $A - \{0_A\}$. احسب : $(x_0 + x) \top (x_0 + y)$

واستنتج وجود عنصر y من A حيث : $xy_2 = x$

هـ - استنتج أن $(A; +, \cdot)$ جسمًا .

27 (1) بين أن : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(2) لتكن المجموعة $K = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

1- بين أن : $\forall x \in K \exists (a, b) \in \mathbb{Q}^2 : x = a + b\sqrt{2}$

ب- بين أن $(K, +, \cdot)$ جسم .

(3) بين أنه إذا كان $x \in K$ توجد حدودية $P(x) = x^2 - ax + b$ عواملها

تنتمي إلى \mathbb{Q} فبعض جذورها لها وجذر ينتمي إلى K

(4) ليكن x من K . نضع

$$N(x) = x\bar{x}$$

بين أن : $\forall (x, y) \in K^2 : \overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$

وأن : $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(5) نضع $A = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

1- بين أن $(A, +, \cdot)$ حلقة جزئية في K .

ب- بين أنه لكي يكون x من A مقلوب في A يكفي أن يكون : $N(x) = 1$

ج- ليكن $x = a + b\sqrt{2}$ عنصرًا من A بحيث : $a > 0$ و $b > 0$

نفترض أن x قابل للعكس في A .

- بين أن : $2 \leq a \leq b$.

- نضع $x = (1 + \sqrt{2})^n$ و $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$

بين أنه إذا كان : $a = b$ فإن : $a_1 = 1$ و $b_1 = 0$

ولا إذا كان : $a \neq b$ فإن : $0 < b_1 < a$ و $0 < a_1 < a$

واستنتج أنه يوجد n من \mathbb{N} : $x = (1 + \sqrt{2})^n$ و ميز جميع العناصر

القابلة للعكس في A .

(6) بين أن : $\forall z \in K \exists q \in A : |N(z - q)| < 1$

استنتج أن : $x = q + \sqrt{2} \mid N(x) \mid N(y)$: $\forall (x, y) \in A \times A - \{0_A\}$

28 ليكن α من \mathbb{R} و التطبيق f_α المعروف من \mathbb{Q} نحو \mathbb{Q} الذي يربط كل

بالنقطة $M(x,y)$ بحيث :

$$\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = 2\alpha x + y + \alpha^2 - 4\alpha \end{cases}$$

نعتبر المجموعة $A = \{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

(1) بين أن f_α تقابل من \mathbb{Q} نحو \mathbb{Q} .

(2) بين أن تركيب التطبيقات \circ قانون دالي في A .

(3) 1- بين أن التطبيق : $\psi: \mathbb{R} \rightarrow A$ نشأ كلاً تقابلياً من (\mathbb{Q}, \circ) نحو (A, \circ)

$\alpha \mapsto \psi(\alpha) = f_\alpha$

ب- حدد ديفة (A, \circ) وعرف تعليلاً للتطبيقين f_α و f_β : $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$

29 نعتبر المجموعة $E = \{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x+y \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

(1) بين أن $(E, +, \cdot)$ جسم تبادلي.

(2) ليكن $\alpha = a + b\epsilon$ حيث : $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

نعتبر التطبيق :

$f: E \rightarrow \mathbb{C}$
 $M(x,y) \mapsto x + y\epsilon$

1- بين أن f نشأ كل تقابلياً من $(E, +)$ نحو $(\mathbb{C}, +)$

ب- حدد ϵ لكي يكون f نشأ كلاً من (E, \cdot) نحو (\mathbb{C}, \cdot)

(3) حدد مصفوف J من E بحيث : $M(x,y) = xI + yJ$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

حيث : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم استنتج أن $(E, +, \cdot)$ فيها متجهي حقيقي

عدد بعد ϵ

(4) نضع : $G = \{ \epsilon^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

أ- بين أن (G, \cdot) زمرة تبادلية.

ب- أعصب ϵ^n : ϵ

ج- استنتج أن G مجموعة منتوية.

د- حدد عناصر G

هـ- أنشئ تشاكلاً تقابلياً بين الزمرتين $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ و (G, \cdot)

حيث : ϵ عدد صحيح طبيعي غير منعدم يتم تعديده

30

لكن $(A_1, +, x)$ حلقة واحدة بحيث $\forall x \in A: x^2 = x$.
 برمز 1_A للعنصر المتبايد للقانون x و 0_A للعنصر المتبايد للقانون $+$.

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ و } x \in A \text{ مع } nx = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ مرة}} \quad 3$$

$$(4) \text{ بين أن : } \forall x \in A: 6x = 0_A$$

$$(2) \text{ نضع : } A_1 = \{x \in A \mid 2x = 0_A\} \text{ ; } A_2 = \{x \in A \mid 3x = 0_A\}$$

1- بين أن $(A_1, +, x)$ و $(A_2, +, x)$ حلقتين واحدتين.

$$(4) \text{ بين أن : } A = A_1 + A_2$$

$$(3) \text{ بين أن : } \forall (x, y) \in A_1 \times A_1: xy = yx = 0_A$$

$$(3) \text{ بين أن : } \forall x \in A_1: x^2 = x$$

(4) استنتج أن A_1 حلقة تبادلية.

$$(5) \text{ بين أن : } \forall (x, y) \in A_1^2: xy = 0_A \Rightarrow yx = 0_A$$

(6) ليكن x من A_2 . بين أن :

$$1_{A_2} = -(x^2 - 1_{A_2}) - (x^2 - x) - (x^2 + x)$$

(7) استنتج أن كل عنصر y من A_2 يمكن أن يكتب على شكل

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

$$\text{مع : } xy_1 = (x + 1_{A_2})y_2 = (x - 1_{A_2})y_3 = 0_A$$

(8) استنتج أن A_1 و A_2 حلقتان تبادليتان.

31

ليكن $(K, +, x)$ جسم بحيث $K \neq \{0\}$ و

$$(1) \forall a \in K - \{0, -e, e\}: a^2 = -a \quad (e \text{ العنصر المتبايد لـ } x)$$

$$(2) \forall a \in K - \{0, -e, e\}: a^2 = -e \quad (2) \text{ بين أن :}$$

(2) باعتبار العنصر $a + e$. استنتج أن e يحقق أحد الشرطين .

$$(3) \text{ (أ) : } e + e + e = 0 \quad \text{ و } \quad (3) \text{ (ب) : } e + e + e + e = 0$$

(3) بين بدراسة $(a + e)^2$ أن $\text{card } K = 3$ أو $\text{card } K = 5$

(4) في كل حالة من الحالتين ، اعط جدول الجمع والضرب في K

اعط مثلاً بسيطاً لجسم K يحقق (4) .

32 تعتبر المصفوفة: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1) أحسب A^3 و A^2 .

(2) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^*: A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

33 تعتبر المصفوفة: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1) أحسب: A^2 , A^3 .

(2) بين أن: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

جيبًا: $A_{n+1} = A_n + 4n + 3$

(3) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 2n^2 + n$

34 لكن p و q عددين حقيقيين ثابتين.

نعر: $A = \{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ qb & a+pb \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$

(1) بين أن: $(A, +, \cdot)$ حلقه...

(2) بين أن إذا كان $p^2 - 4q < 0$ و $(a,b) \in A$ ، جميع عناصره...

(3) نفترض في كل ما يلي أن: $q=1$ و $p=2$.

أ. نعر التمثيل d المعروف بـ:

$$M(a,b) \mapsto d(M(a,b))$$

بين أن d تشاكل من (A, \cdot) نحو (\mathbb{R}^*, \cdot) .

ب. نعر المجموعة

حدودية المجموعة (d, \cdot) .

ج. المستوى \mathbb{C} مرسوم بالمعلم $(0, i, j)$. نعر مجموعة العدد N من

المستوى المعرفة بما يلي:

$$N = \{ M(a,b) \mid M(a,b) \in \text{Kend} \}$$

حدد وأنشئ المجموعة N .

د. حل في المجال $[0, 2\pi]$ المعادلة: $\det \left(M\left(\frac{\cos x}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) \right) = \frac{3}{4}$

جيب x هو المحلول.

35 نعتبر المجموعة : $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0\}$

(1) بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

(2) حدد أساساً للفضاء $(E, +, \cdot)$ ثم استنتج بعد E .

(3) لنك $\vec{u} = (2, 0, 0, 2)$ و $\vec{v} = (0, -1, 0, 1)$ و $\vec{w} = (0, 1, 1, 1)$

بين أن الأسوة $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ أساس للفضاء $(E, +, \cdot)$.

36 ليكن ψ التلخيص المعرف بـ : $M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

$$\psi \cdot M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \psi(M) = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) بين أن لكل M_1, M_2 من $M_2(\mathbb{R})$ و لكل λ من \mathbb{R} :

$$\psi(\lambda M_1) = \lambda \psi(M_1) \quad ; \quad \psi(M_1 + M_2) = \psi(M_1) + \psi(M_2)$$

(2) نعتبر المجموعتين :

$$N(\psi) = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \psi(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

$$Im(\psi) = \{\psi(M) \mid M \in M_2(\mathbb{R})\}$$

1- حدد $N(\psi)$;

2- بين أن $N(\psi)$ و $Im(\psi)$ فضاءات متجهية ثم حدد أساساً

لكل من $N(\psi)$ و $Im(\psi)$.

3- حدد $\dim M_2(\mathbb{R})$.

4- قار $\dim N(\psi) + \dim Im(\psi)$ و $\dim M_2(\mathbb{R})$.

37 نعتبر المجموعة $E = \{M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a+c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

نضع : $K = M(0, 0, 1)$; $J = M(0, 1, 0)$; $I = M(1, 0, 0)$

(1) أكتب $M(a, b, c)$ بدلالة I, J, K و a, b, c .

2- بين أن : $J^2 = K$ و $K^2 = J + K$ و $JK = KJ = I + J$

(3) بين أن : $(E, +, \cdot)$ حلقة واحدة.

(4) بين أن : $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي ثم حدد بعد E .

(5) تحقق من أن : $J^2 = I + J$ و حدد J^{-1} .

38 نعتبر المجموعة : $E = \{M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} / (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$

(I) نضع : $K = M(0,0,1)$ و $J = M(0,1,0)$ و $I = M(1,0,0)$

(1) بين أن : $(E, +, \cdot)$ حلقة : هل هي كاملة ؟

(2) بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي ثم حدد $\dim E$

(3) ماهو الشرط اللازم والكافي لكي تكون $(E, +, \cdot)$ جسم ؟

(4) ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، أجب :

أ- $(bI + cK)^n$

ب- استنتج لمحددات $M(a,b,c)$ في الأساس $\{I, J, K\}$

(5) نضع : $n! \cdot u_n = (M(a,b,c))^n$ و $u_n = 1 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

أ- حدد لمحددات u_n في الأساس $\{I, J, K\}$

ب- نرعر بـ $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ لمحددات u_n أجب مايلي :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

(II) نضع : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1) أ- نصف أن : $A^2 - 3A + 2I = 0$

ب- امسح أن A قابل مقلوب وحدد A^{-2}

(2) ناستعمل طبريه كوصف حدد A^{-2}

(3) نضع : $B_n = A^n + A - 2I$ بين أن

أ- $A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n$

ب- $A^{n+2} = 2A^{n+1} + A - 2I$

ج- $B_{n+2} = 2B_{n+1}$

(4) استنتج B_n بدلالة B_0 و n

(5) حدد A^n بدلالة n

(1) ليكن E مجموعة الدوال f على \mathbb{R} حيث

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x_2) = 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

(2) ليكن F مجموعة الدوال التلقية على \mathbb{R} نحو \mathbb{R} ، أي أن $F \subseteq E$ و $F(x,0) = 0$ و $F(0,x) = 0$ جميعها

40 لنك $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x\}$

حسب A و B حدود لسان درجتهما أصغر أو مساوي 1

(1) بين أن $(E; +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

(2) نعتبر المتسلسلة $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$:

حسب $f_1(x) = x \sin x$, $f_2(x) = x \cos x$, $f_3(x) = \sin x$, $f_4(x) = \cos x$

بين أن \mathcal{B} أساس للفضاء $(E; +, \cdot)$.

(3) ليكن h من \mathbb{R} نعتبر الداليتين g و h بحيث:

$$h(x) = \sin(\alpha + x) \quad \text{و} \quad g(x) = \cos(\alpha + x)$$

أ- تأكد من أن $(h, g) \in E^2$: م حدود أساس g و h بالنتيجة 1

ب- هل المتسلسلة $\mathcal{B}' = (g, h, f_3, f_4)$ أساس للفضاء $(E; +, \cdot)$ ؟

41 لنك (F) مجموعة الدوال العددية التي درجتها أصغر أو مساوي

2 نعتبر الحدوديات f و g و h المعرفة بمانتي.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + x \quad g(x) = x + 1 \quad h(x) = x^2 + 1$$

(1) بدو أن $\mathcal{B} = (f, g, h)$ أساس للفضاء المتجهي $(F; +, \cdot)$.

(2) لنك g_1 و g_2 و h_1 الحدوديات المعرفة بمانتي.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g_1(x) = 2x^2 + x + 1, \quad g_2(x) = -x^2 + 3x + 2, \quad h_1(x) = 2x + 3$$

أ- حدود أساس كل من g_1 , g_2 , h_1 بالنسبة للأساس \mathcal{B}

ب- بين أن $\mathcal{B}' = (g_2, g_1, h_1)$ أساس للفضاء المتجهي $(F; +, \cdot)$.

42 لنك I مجموعة الدوال العددية الفردية المعرفة على \mathbb{R}

و J مجموعة الدوال العددية الزوجية المعرفة على \mathbb{R}

(1) بين أن $(I; +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

(2) بين أن $(J; +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

(3) حدد تقاطع المجموعتين I و J.

ب- بين أن كدالة f تكب شكل و جيد كمجموع لمتنهر

من I و متنهر من J.

ليكن $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و f تطبيق من E نحو F بحيث:

$$(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2) (\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2) \quad f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$$

$$\text{نضع: } \text{Ker } f = \{ \vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{0} \}$$

(1) بين أنه إذا كان F جزء غير فارغ من E و تحقق:

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2: \quad \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in F$$

فإن $(F; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

(2) بين أن $(f(E); +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

(3) بين أن $(\text{Ker } f; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

(4) بين أن f تطبيق نباسي إذا وعطرا إذا كان $\text{Ker } f = \{ \vec{0} \}$.

(5) بين أنه إذا كانت: $\mathcal{B} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ أسرة مستقلة و f تطبيق

نباسي فإن: $f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2), \dots, f(\vec{x}_n)$ أسرة مستقلة.

(6) نفرض أن $\dim E = n$. بين أن العبارات a و b و c متكافئة:

(a) f تطبيق بياضي من E نحو E .

(b) f تطبيق نسولي من E نحو E .

(c) f يحول أساس لـ E إلى الأساس لـ E .

(7) ليكن $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ أساس للمستوى المتجهي $(E; +, \cdot)$

أ- بين أنه إذا كان $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ أساس للفضاء المتجهي $(\text{Ker } f; +, \cdot)$

فإن $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ أساس للفضاء المتجهي $(f(E); +, \cdot)$

ب- استنتج أن: $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim f(E)$

ليكن E مجموعة الدوال القابلة للاضعاف على \mathbb{R}

$$(\alpha \in \mathbb{R}) \quad \gamma: E \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \begin{matrix} f(\alpha) & 0 \\ f(\alpha) & f(\alpha) \end{matrix}$$

$$f \mapsto \gamma(f) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & 0 \\ f(\alpha) & f(\alpha) \end{pmatrix}$$

(1) بين أن $(E; +; \gamma)$ حلقة

(2) بين أن $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي.

(3) بين أن $\gamma(f+g) = \gamma(f) + \gamma(g)$ $\forall (f, g) \in E^2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\gamma(\alpha f) = \alpha \gamma(f)$$

(4) بين أن γ تشاكل من $(E; +, \gamma)$ نحو $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +, \gamma)$.

45 حل في \mathbb{R}^3 النظام التالية:

$$(S): \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y-z=2 \\ 4x+9y+z=4 \end{cases}$$

46 1) لنكن a, b, c و a, b, c أعداد حقيقية معلومة. حل في \mathbb{R}^3 النظام:

$$(S): \begin{cases} 2x-y+z=a \\ x+2y-4z=b \\ 2x-y+3z=c \end{cases}$$

2) نعتبر المصفوفتين:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1- حدد مقلوب المصفوفة A .

ب- حدد المصفوفة X التي تحقق: $AX=B$.

47 لنكن a, b, c و a, b, c أعداد حقيقية معلومة. حل باستخدام طريقة كوس النظام التالية:

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (S): \begin{cases} x+ay+az=0 \\ x+by+b^2z=0 \\ x+cy+c^2z=0 \end{cases}$$

48 لنكن a, b, c و a, b, c أعداد حقيقية معلومة. حل في \mathbb{R}^3 النظام التالية:

$$(S): \begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$$

49 حل في \mathbb{R}^3 النظم التالية: ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$(S_1): \begin{cases} \lambda x + (\lambda+1)y + (\lambda+2)z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad (S_2): \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + (1-\lambda)y + 3z = 0 \\ -3x + 3y - (4+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$(a > 0) \quad (S_3): \begin{cases} -2x + ay + a^2z = 0 \\ \frac{1}{a}x - 2y + az = 0 \\ \frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a}y - 2z = 0 \end{cases}$$

العدد π

نبذة تاريخية عن العدد π

حاول الإنسان منذ القدم تحديد العلاقة بين محيط دائرة وشعاعها وبالضبط إيجاد خارج (rapport) محيط دائرة وقطرها .

فقد عثر في وثائق مصرية (على ورق البردي) يرجع تاريخها إلى ما قبل الميلاد

بحوالي 2000 سنة على تقريبات للعدد π نذكر منها : $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,1604925...$

أما البابليون فقد سبق لهم أن استعملوا تقريبات أخرى للعدد π منها $3 + \frac{1}{8}$

و $3 + \frac{1}{7}$.

وبعد ذلك بكثير ، تمكن العالم الرياضي الإغريقي أرخميدس Archimède 287 ق.م. -

212 ق.م.) من إعطاء التآطير التالي للعدد π : $3 + \frac{1}{7} < \pi < 3 + \frac{10}{71}$.

وإذا انتقلنا إلى عصر النهضة ، نجد أن أحسن تقريب تم التوصل إليه هو التقريب

العشري للعدد π إلى 10^{-34} أي بواسطة عدد عشري (جزؤه الصحيح 3) وجزؤه

العشري يتضمن 34 رقما (أي بواسطة 34 رقم وراء الفاصلة) .

وهذا صيغ أخرى ستأتي بعد ذلك ، نقف في ما يلي عند بعض منها .

فهذا الرياضي الفرنسي فييت Viete (1540م - 1603م) يقدم الصيغة التالية :

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} \dots$$

وبعده أعطى الرياضي البريطاني فاليس Wallis (1616م - 1703م) الصيغة التالية :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2^n n!}{35.7... (2n-1)} \right)^2$$

وجاء بعده العالم السكوتلاندي كريستوفري Gregory (1638م - 1675م) سنة 1671

بالصيغة : $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

وبعده أثبت ليبنيز Leibniz الصيغة : $\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots \right)$

ثم تقدم بعد ذلك Johann M. بالصيغة الشهيرة :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$$

والتي تمكن باستعمالها سنة 1706 من تحديد تقريب عشري للعدد π إلى 10^{-100} .

هذا وقد أعطى الرياضي المرموق أوليبر Euler (1707م - 1783م) صيغة أخرى نذكر منها :

$$\pi = \sqrt{6} \left(\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \right)$$

$$\cdot \pi = \frac{\sqrt{90}}{2} \left(\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4}} \right)$$

إن استعمال الصيغة : $\frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$ سنة 1844

مكن الرياضي Johann من حساب π إلى 10^{-205} هذا مع العلم أن "الرقم القياسي" لحساب أدق تقريب عشري للعدد π بدون استعمال آلة حاسبة هو للعالم الرياضي William Shanks (1812م - 1882م) حيث حدد التقريب العشري للعدد π إلى 10^{-527} (527 رقم وراء الفاصلة) .

وقد تمكن بعد ذلك Ferguson سنة 1947 باستعمال آلة حاسبة "صغيرة" واعتماد

الصيغة $\frac{\pi}{4} = 3\text{Arctan}\left(\frac{1}{4}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{20}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{1985}\right)$ من حساب تقريب

عشري إلى 10^{-880} وهو "الرقم القياسي" قبل ظهور الحاسوب والبرمجة والإعلاميات. ويظهر الحاسوب ودخول تقنيات البرمجة ، بدأت "الأرقام القياسية" تتحطم يوما بعد يوم . ففي سنة 1949 توصل Eriac إلى حساب 2037 رقما بعد الفاصلة (تقريب

عشري إلى 10^{-2037}) وذلك باستعمال صيغة Machin ، وتمكن Gennys سنة 1958 من حساب 10000 رقما بعد الفاصلة ، وفي سنة 1961 وباستغلال العلاقتين :

$$\frac{\pi}{4} = 6\text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) + 2\text{Arctan}\left(\frac{1}{57}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 12\text{Arctan}\left(\frac{1}{18}\right) + 8\text{Arctan}\left(\frac{1}{57}\right) - 5\text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) \text{ و}$$

تمكن S.& W. من حساب 100000 رقما بعد الفاصلة ، وفي سنة 1973 توصل

Bouyer و Guillond من حساب 1000000 رقما بعد الفاصلة ، وفي سنة

1986 توصل Bayley إلى حساب 29360000 رقما بعد الفاصلة ، وفي سنة 1988

تمكن الأخوان Chuckovsky من حساب 201000000 رقما وراء الفاصلة .

وبدا عدد أرقام الجزء العشري للعدد π في ارتفاع مضطرد إلى أن وصل سنة 1991

إلى $2(10^9)$ رقم .

* إن أول رياضي تمكن من إثبات عدم انتماء π إلى مجموعة الأعداد الجذرية هو العالم Johann - Heinrich حيث برهن ، سنة 1761 على صحة الاستلزام التالي :

$$(x \in \mathbb{Q}^*) \Rightarrow (\tan x \notin \mathbb{Q}^*)$$

وفي المسألة التالية ، نقترح طريقة لإثبات أن : $\pi \notin \mathbb{Q}$.

1) ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين .
لكل عدد n من \mathbb{N} نعتبر الحدودية :

$$P_n(x) = \frac{x^n (bx - a)^n}{n!}$$

(1) حدد درجة P_n .

(2) بين أنه لكل x من \mathbb{R} : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} x^k$

(3) بين أنه لكل x من \mathbb{R} : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} C_n^{k-n} (b^{k-n} a^{2n-k} x^k)$

(4) بين أن :

(أ) لكل k من \mathbb{N} بحيث $0 \leq k \leq n-1$ لدينا : $P_n^{(k)}(0) = 0$.

(ب) لكل k من \mathbb{N} بحيث $n \leq k \leq 2n$ لدينا : $P_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} C_n^{k-n} (b^{k-n} a^{2n-k})$

(5) استنتج أنه لكل k من \mathbb{N} بحيث $0 \leq k \leq 2n$ لدينا : $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{N}$

(6) بين أنه لكل x من \mathbb{R} : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} x^k$

(7) بين أنه لكل k من \mathbb{N} بحيث $0 \leq k \leq 2n$ لدينا : $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(0)$

II) نفترض أن $\pi = \frac{a}{b}$. نضع : $I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x dx$

(1) بين أن : $I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin^{(2n+1)}(x - (2n+1)\frac{\pi}{2}) dx$

(2) استنتج أن :

$$I_n = \left[\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k P_n^{(k)}(x) \sin^{(2n+1-k)} \left(x - (2n+1)\frac{\pi}{2} \right) \right]_0^\pi + (-1)^{2n+1} \int_0^\pi P_n^{(2n+1)}(x) \sin \left(x - (2n+1)\frac{\pi}{2} \right) dx$$

(3) بين أن : $I_n = \left[\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k P_n^{(k)}(x) \sin \left(x - (k+1)\frac{\pi}{2} \right) \right]_0^\pi$

(4) استنتج أن : $I_n \in \mathbb{N}$

(5) نضع : $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ وليكن $f(x) = x(a - bx)$

(أ) بين أن : $0 \leq |I_n| \leq \pi \frac{M^n}{n!}$

(ب) استنتج أن I_n تؤول إلى 0 عندما يؤول n إلى $+\infty$.

(ج) استنتج أن : $\pi \notin \mathbb{Q}$